

## Prova Modelo Exame Final de Matemática A

### Prova 1 | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

António Leite

Última atualização em 13/06/2022

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância 30 minutos. | 5 Páginas.

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado a cor vermelha, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

---

O formulário pode ser visto *aqui*.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---



3. Considere todos os números naturais inferiores a 4000.

Destes números, quantos são pares e têm os algarismos todos diferentes?

- (A) 1249                      (B) 1157                      (C) 1120                      (D) 840

4. Os jogos Olímpicos de Verão são um evento multidesportivo global com diversas modalidades, em que participam diversos países do mundo, incluindo Portugal. Estes jogos são, normalmente, realizados a cada quatro anos.

As diversas comitativas portuguesas que já participaram nestes jogos, incluindo os de Tóquio 2020, já angariaram diversas medalhas, sendo cinco de ouro, catorze de bronze e algumas de prata. Estas medalhas, que são todas diferentes, vão ser colocadas em fila, umas a seguir às outras, numa vitrine, para serem expostas aos portugueses.

Sabe-se que a probabilidade de ficar uma medalha de ouro em cada uma das pontas (extremos) é igual a  $\frac{5}{189}$ .

Determine o número de medalhas de prata.

5. O Plano Alpha é uma empresa de estudos matemáticos.

Dos funcionários do Plano Alpha, sabe-se que:

- 88% estão vacinados contra a covid-19;
- Se o funcionário está vacinado contra a covid-19, a probabilidade de ele ter menos de 40 anos de idade é  $\frac{2}{11}$ .
- Se o funcionário não está vacinado contra a covid-19, a probabilidade de ele ter menos de 40 anos de idade é  $\frac{2}{3}$ .

Determine a probabilidade de um desses funcionários, escolhido ao acaso, estar vacinado contra a covid-19, sabendo que tem idade não inferior a 40 anos.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. Seja  $(u_n)$  uma progressão aritmética.

Sabe-se que  $u_3 = a + 1$  e  $u_5 = 2a + 4$ , sendo  $a$  um número real.

Sabe-se, ainda, que a soma dos treze primeiros termos de  $(u_n)$  é igual a 208.

Qual é o valor da razão desta progressão?

- (A) 2                      (B) 3                      (C) 6                      (D) 7

7. Considere a sucessão  $(u_n)$  de termo geral  $u_n = \frac{(-1)^{n+1} \times 6n}{1 + 2n}$ .

Prove que a sucessão  $(u_n)$  é limitada e indique o conjunto de todos os minorantes e o conjunto de todos os majorantes.

8. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z_1 = e^{i\theta}$  com  $\theta \in ]0, \pi[$ .

O número complexo  $z_2 = z_1 + 1$ , na forma trigonométrica, pode ser representado por:

- (A)  $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$                       (C)  $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$   
(B)  $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta}$                       (D)  $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta}$

9. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \frac{1+i}{i} + \frac{i}{1+i} + i^{31} \text{ e } z_2 = -\sin \frac{\pi}{7} + i \cos \frac{\pi}{7}$$

Determine o menor número natural  $n$  para o qual  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$  é um número real positivo.

10. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 e^{x-2} & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{\ln(x-1)}{x^2 + x - 6} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

10.1. Averigue se a função  $f$  é contínua em  $x = 2$ .

10.2. Estude a função  $f$  quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico, em  $]-\infty, 2[$  e, caso exista, escreva a sua equação reduzida.

11. Seja  $f$  uma função real de variável real, de domínio  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que:

- $f$  é uma função ímpar;
- a reta de equação  $y = -2x + 3$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$  em  $+\infty$ .

Prove que o gráfico de  $f$  admite uma assíntota oblíqua em  $-\infty$  e escreva a sua equação reduzida.

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja  $h$  a função de domínio  $\mathbb{R}^+$ , cuja derivada  $h'$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , é dada por

$$h'(x) = 1 - (\ln(x) - 1)^2$$

Estude a função  $h$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $h$  tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $h$  tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de  $h$ .

13. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são solução da inequação:

$$\ln \left( \frac{e^x - 2}{1 - 3e^x} \right) \leq 0$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

14. Na figura 2, estão representados, num referencial o.n  $xOy$ , o circunferência de centro  $O$  e raio 2.

Sabe-se que:

- Os pontos  $A$  e  $C$  têm coordenadas  $(2, 0)$  e  $(-2, 0)$ , respetivamente;
- o ponto  $B$  desloca-se ao longo do arco  $AC$ , no primeiro e segundo quadrantes, sem nunca coincidir com os pontos  $A$  e  $C$ ;
- $\alpha$  é a amplitude do ângulo orientado cujo lado de origem é o semieixo positivo  $Ox$  e cuja lado extremidade é a semirreta  $\overrightarrow{OB}$ .

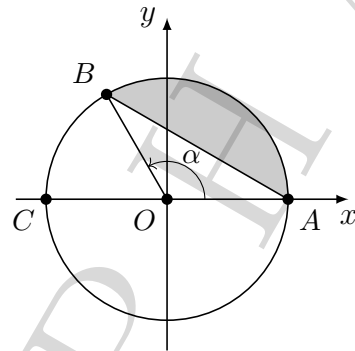


Figura 2

14.1. Qual o perímetro do triângulo  $[AOB]$  quando a reta  $OB$  tem declive  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ?

- (A)  $2\sqrt{3} + 4$       (B)  $4 + 2\sqrt{\sqrt{3} + 2}$       (C)  $4\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 2$       (D)  $6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

14.2. Seja  $A(\alpha)$  a área da região sombreada em função de  $\alpha$ . Sabe-se que quando o ângulo  $\alpha$  duplica a área da região sombreada sextuplica.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, esse valor de  $\alpha$ , sabendo que existe e é único.

Apresente o resultado em radianos, arredondado às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondado(s) às milésimas.  
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

15. Considere a função  $f$ , de domínio  $]0, \pi[$ , definida por  $f(x) = 2 \cos x(1 + \sin(x))$ .

Sejam, num referencial ortonormado do plano,  $A$  e  $B$  os pontos em que as suas ordenadas são extremos relativos de  $f$ , sendo  $A$  o ponto de maior ordenada e  $B$  o ponto de menor ordenada.

Sabe-se que  $[ABCD]$  é um trapézio sendo que  $C$  e  $D$  pertencem ao eixo  $Oy$  e têm a mesma ordenada que  $A$  e  $B$ , respetivamente.

Determine o valor exato da área do trapézio  $[ABCD]$ .

**FIM**

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	<b>1.1</b>	<b>1.2</b>	<b>3.</b>	<b>4.</b>	<b>6.</b>	<b>8.</b>	<b>9.</b>	<b>10.1.</b>	<b>10.2.</b>	<b>14.1.</b>	<b>14.2.</b>	<b>15.</b>	<b>Subtotal</b>
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	<b>158</b>
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação	<b>2.</b>	<b>5.</b>	<b>7.</b>	<b>11.</b>	<b>12.</b>	<b>13.</b>							<b>Subtotal</b>
Cotação em pontos	3 × 14											<b>42</b>	
<b>TOTAL</b>												<b>200</b>	