11º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO MINITESTE 3 | 2023

António Leite

1.

1.1. $\forall x \in D_f$, tem-se que:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{x}{3}\right) \leq 1$$

$$-2 \leq -2\cos\left(\frac{x}{3}\right) \leq 2$$

$$-3 \leq -1-2\cos\left(\frac{x}{3}\right) \leq 1$$

Logo, $D'_f = [-3, 1]$.

1.2. Pretendemos determinar uma expressão geral do zeros da função f, assim:

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow -1-2\cos\left(\frac{x}{3}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow -2\cos\left(\frac{x}{3}\right)=1 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee \frac{x}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x=2\pi+6k\pi \vee x=4\pi+6k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

1.3. Os minimizantes da função f são os valor das abcissas que satisfazem a equação $f(x)=-3$, pelo que:

$$\begin{aligned} f(x)=-3 &\Leftrightarrow -1-2\cos\left(\frac{x}{3}\right)=-3 \\ &\Leftrightarrow -2\cos\left(\frac{x}{3}\right)=-2 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{3}\right)=1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{3}=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x=6k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

1.4. Como a função f tem domínio $\mathbb{R}$, $\forall x \in D_f,\ x+6\pi \in D_f$, portanto

$$\begin{aligned} f(x+6\pi) &= -1-2\cos\left(\frac{x+6\pi}{3}\right) \\ &= -1-2\cos\left(\frac{x}{3}+2\pi\right) \end{aligned}$$

Como a função cosseno é periódica de período mínimo 2π, vem que

$$-1-2\cos\left(\frac{x}{3}+2\pi\right) = -1-2\cos\left(\frac{x}{3}\right) = f(x)$$

Como, $\forall x \in D_f,\ x+6\pi \in D_f,\ f(x+6\pi)=f(x)$, a função f é periódica de período 6π.

2.

2.1. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R}:\ 3x-\frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Logo,

$$\begin{aligned} & 3x-\frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & 3x \neq \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & 3x \neq \frac{7\pi}{10}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & x \neq \frac{7\pi}{30}+\frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Portanto, $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7\pi}{30}+\frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2.2.

$$\begin{aligned} & g(x) = 2-\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & 2+\tan\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) = 2-\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & \tan\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & 3x-\frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & 3x = -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & 3x = -\frac{2\pi}{15}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{2\pi}{45}+\frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3.

3.1. Para calcular uma expressão geral dos maximizantes da função h precisamos primeiro de encontrar o máximo absoluto desta função. Assim, $\forall x \in D_h$, tem-se que:

$$-1 \leq \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$
$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \leq \sqrt{2}$$
$$1-\sqrt{2} \leq 1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \leq 1+\sqrt{2}$$

Logo, os maximizantes da função h são os valor das abcissas que satisfazem a equação $h(x) = 1+\sqrt{2}$, pelo que:

$$\begin{aligned}
h(x) = 1+\sqrt{2} &\Leftrightarrow 1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1+\sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

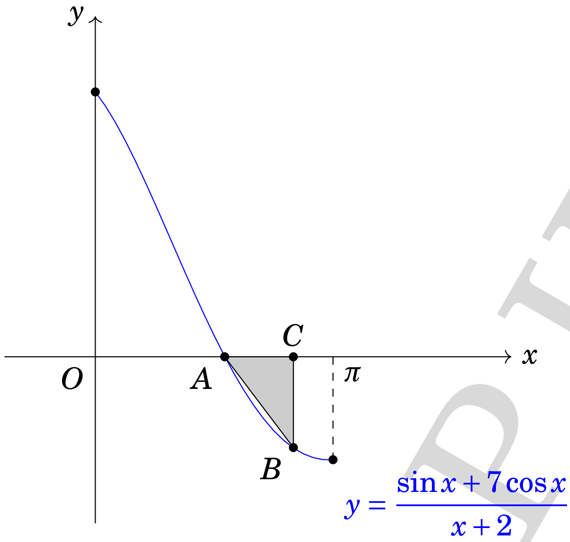
3.2. Temos que:

$$\begin{aligned}
h\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= 1+\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 1+\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}\right) \\
&= 1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) \\
&= 1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 1+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 1+1 = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right) \\
&= 1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right) \\
&= 1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 1+\sqrt{2}\times 1 \\
&= 1+\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Logo, $h\left(-\frac{\pi}{12}\right)-h\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2-(1+\sqrt{2}) = 2-1-\sqrt{2} = 1-\sqrt{2}$

4. Temos que, com o auxílio da calculadora gráfica, é possível visualizar o seguinte gráfico:



As coordenadas dos pontos, arredondadas às centésimas, são:

- $A(1,71;0)$
- $B(2,62;-1,20)$
- $C(2,62;0)$

Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} \approx \frac{0,91 \times 1,20}{2} \approx 0,5$$

5.

Se $x \in \left[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}\right]$, então, $\sin x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Dos valores apresentados nas quatro opções, apenas $-\frac{5}{8} \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Portanto, a equação $\sin x = -\frac{5}{8}$ é impossível no intervalo dado.

Logo, $a = -\frac{5}{8}$.
Resposta: **(D)**

FIM