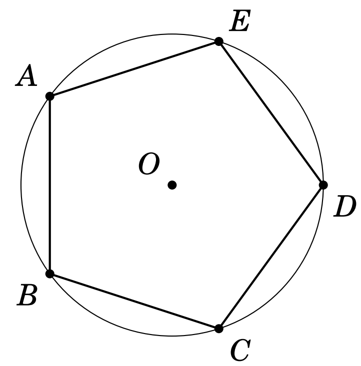
PLANO α

11º ANO | TESTE 2 | 2023

António Leite

---

1. Na figura ao lado, está representado, o polígono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro O e raio 2.



1.1. Sendo $\dot{O}E$, o lado origem, indique o lado extremidade dos ângulos generalizados definidos por:

1.1.1. $(-216°, -5)$

1.1.2. $\left(\dfrac{24\pi}{5}, 3\right)$

1.2. Determine a área do quadrilátero $[ABCO]$.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondada às décimas.

2. Sabe-se que $\cos(-\pi-\alpha)=\frac{1}{3} \wedge \alpha \in \left]0, \pi\right[$.

Determine o valor exato de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)-2\tan(-\pi+\alpha)$.

Apresente o resultado na forma $\dfrac{a}{b}\sqrt{c}$, com $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $c \in \mathbb{N}$.

3. Seja $\theta \in \left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[$.

Qual das expressões seguintes designa um número real positivo?

(A) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ **(B)** $\tan(-\pi+\theta)$ **(C)** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ **(D)** $\cos(-\theta-\pi)$

4. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações.

4.1. $\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=0$

4.2. $4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-3x\right)=\sqrt{12}$

4.3. $\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{5}\right)=\tan(\pi-x)$

5. Considere as seguintes igualdades.

- $\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{20\pi}{3}\right)+a=\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$, sendo a um número real;
- $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)-2\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)+b=\tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$, sendo b um número real.

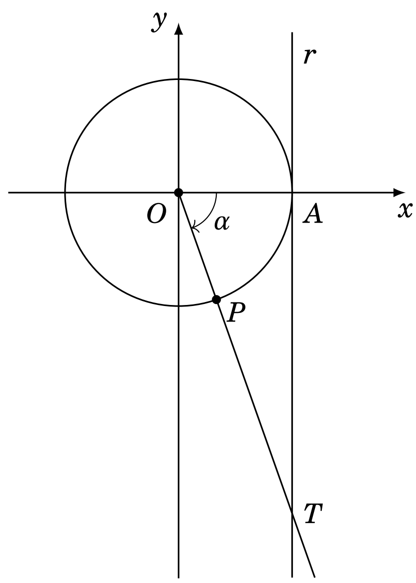
Determine o valor exato de $\dfrac{a}{b}$.

Apresente o resultado com denominador racional.

6. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- a reta r é tangente à circunferência no ponto $A(1,0)$;
- o ponto P, situado no quarto quadrante, pertence à circunferência;
- a semirreta $\dot{O}P$ interseta a reta r no ponto T;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$;
- o ponto P tem ordenada $-\dfrac{15}{17}$.



Determine a abcissa do ponto P e a ordenada do ponto T.

7. Considere a equação $2\cos^2(x)-1=0$.

Qual das seguintes é uma expressão geral das soluções desta equação?

(A) $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \vee x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

(B) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

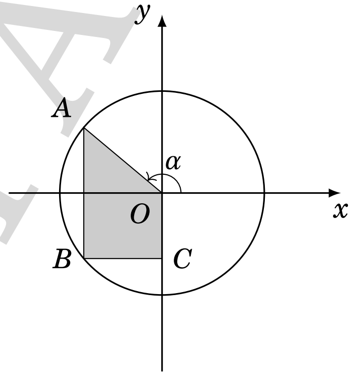
(C) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

(D) $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \vee x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi \vee x=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

8. Na figura ao lado, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro no ponto O e raio 3 e o trapézio retângulo $[OABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A, situado no segundo quadrante, pertence à circunferência;
- o ponto B, situado no terceiro quadrante, pertence à circunferência;
- o ponto C tem abcissa zero e é tal que $[BC] \perp Oy$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$.



8.1. Mostre que a área do trapézio $[OABC]$ é dada, em função de α, pela expressão

$$-\frac{27}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

8.2. Admita que, para um certa posição do ponto A, se tem $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Determine, para essa posição do ponto A, o valor exato da área do trapézio $[OABC]$.

Apresente o resultado na forma $\frac{a}{b}\sqrt{c}$, com $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $c \in \mathbb{N}$.

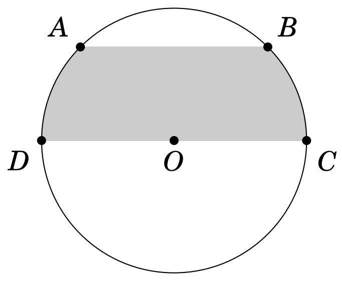
9. Sabe-se que $(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) = \frac{1}{2}$ e que $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\tan x$.

10. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro O e diâmetro $[CD]$.

Sabe-se que:

- A e B são pontos da circunferência;
- $[AB] \mathbin{/\!/} [CD]$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COB;
- $\overline{OC} = 5$.



Mostre que a área da região sombreada na figura é dada, em função de α, por

$$25(\alpha + \cos\alpha\sin\alpha)$$

FIM