

12º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 2 | 2022

António Leite

1.

Seja n o número da linha.

Portanto, $1 + n + n + 1 = 48$, ou seja, $2n + 2 = 48 \Leftrightarrow n = 23$.

A linha 23 tem 24 elementos.

O número de casos possíveis é ${}^{24}C_2$.

Linha 23:

$$1 \quad 23 \quad {}^{23}C_2 = 253 \quad {}^{23}C_3 = 1771 \quad {}^{23}C_4 = 8855 \quad {}^{23}C_5 = 33649 \quad \dots$$

Logo, há quatro elementos da linha 23 que são números de quatro algarismos, são eles:

$${}^{23}C_3, {}^{23}C_4, {}^{23}C_{19} \text{ e } {}^{23}C_{20}$$

Assim, o número de casos favoráveis é 4C_2 .

Pelo que, a probabilidade pedida é $\frac{{}^4C_2}{{}^{24}C_2} = \frac{1}{46}$.

Resposta: (D)

2.

Para averiguar se a função é contínua em $x = 1$, temos que verificar se

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

- $f(1) = \frac{1}{12}$

-

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x^2-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - 3^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+8-9}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1}{2 \times 6} = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{12x^3 - 12} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x+1)(x-1)}{(12x^2 + 12x + 12)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{12x^2 + 12x + 12} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Cálculo Auxiliar - Regra de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -1 & -1 \\ 1 & & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 12 & 0 & 0 & -12 \\ 1 & & 12 & 12 & 12 \\ \hline & 12 & 12 & 12 & 0 \end{array}$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 1$.

3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1}}{2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{1}{x^2}\right)}}{2x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{9+0}}{2-0} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1}}{2x - 1} + a = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} + a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{2x^2 - x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{2x^2 - x + 6} - b = -3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - b = -3 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} + 3 \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$$

$$\text{Pelo que, } a + b = 1 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow a + b = \frac{7}{2}.$$

4.

Consideremos a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um elemento deste grupo de Cataris e os acontecimentos:

A : "o elemento apoiou a Argentina"

F : "o elemento apoiou a França"

Temos que:

- como o número de elementos que apoiou a seleção da Argentina é igual ao dobro do número de elementos que apoiou a seleção da França, então $P(A) = 2P(F)$;
- como o número de elementos que apoiou, pelo menos, uma destas duas seleções é igual ao quádruplo do número de elementos que não apoiou a seleção da Argentina e apoiou a seleção da França, então $P(A \cup F) = 5P(\bar{A} \cap F)$.

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} P(A \cup F) &= 5P(\bar{A} \cap F) \Leftrightarrow P(A) + P(F) - P(A \cap F) = 5(P(F) - P(A \cap F)) \\ \Leftrightarrow P(A) + P(F) - P(A \cap F) &= 5P(F) - 5P(A \cap F) \\ \Leftrightarrow 5P(A \cap F) - P(A \cap F) &= 5P(F) - P(F) - P(A) \\ \Leftrightarrow 4P(A \cap F) &= 4P(F) - P(A) \end{aligned}$$

Por outro lado, $P(A) = 2P(F)$, ou seja, $P(F) = \frac{P(A)}{2}$, assim temos que:

$$\begin{aligned} 4P(A \cap F) &= 4P(F) - P(A) \\ \Leftrightarrow 4P(A \cap F) &= 4 \times \frac{P(A)}{2} - P(A) \\ \Leftrightarrow 4P(A \cap F) &= 2P(A) - P(A) \\ \Leftrightarrow 4P(A \cap F) &= P(A) \\ \Leftrightarrow \frac{P(A \cap F)}{P(A)} &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow P(F|A) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Pretende-se determinar a probabilidade do elemento escolhido, ao acaso, ter apoiado a seleção da França, sabendo que apoiou a seleção da Argentina, isto é $P(F|A)$.

Portanto, $P(F|A) = \frac{1}{4} = 25\%$.

5.

5.1.

$$\frac{8!}{2!} = 20160$$

5.2.

$$\text{Número de casos possíveis} = \frac{12!}{2!2!2!} = 59875200$$

Número de casos favoráveis:

- O anagrama pode começar pela letra U : $1 \times \frac{11!}{2!2!2!}$
- O anagrama pode começar pela letra I : $1 \times \frac{11!}{2!2!}$
- O anagrama pode começar pela letra A : $1 \times \frac{11!}{2!2!2!}$
- O anagrama pode começar pela letra E : $1 \times \frac{11!}{2!2!}$

Portanto, o número de casos favoráveis é igual a

$$2 \times \frac{11!}{2!2!2!} + 2 \times \frac{11!}{2!2!} = 29937600$$

Assim, a probabilidade pedida é igual a

$$\frac{29937600}{59875200} = \frac{1}{2}$$

6.

O número de casos possíveis é igual a ${}^{10}C_4$.

O número de casos favoráveis é igual à diferença entre o número total de caminhos existentes que ligam o ponto A ao ponto B e o número total de caminhos que ligam o ponto A ao B e que passam pelo ponto C , ou seja, ${}^{10}C_4 - {}^3C_1 \times {}^7C_3$.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{10}C_4 - {}^3C_1 \times {}^7C_3}{{}^{10}C_4} = 0,5$.

7.

Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um sócio desta associação, e os acontecimentos:

A : "o sócio pratica caça"

B : "o sócio pratica pesca"

Temos que: $P(A) = 0,8$; $P(\bar{B}|A) = 0,25$ e $P(\bar{A} \cap B) = 0,05$.

Pretende-se determinar $P(\bar{A}|\bar{B})$.

Pelo que: $P(\bar{B}|A) = 0,25 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = 0,25 \Leftrightarrow P(\bar{B} \cap A) = 0,25 \times 0,8 \Leftrightarrow P(\bar{B} \cap A) = 0,2$.

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

	A	\bar{A}	Total
B	0,6	0,05	0,65
\bar{B}	0,2	0,15	0,35
Total	0,8	0,2	1

Portanto, $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,15}{0,35} = \frac{3}{7}$.

8.

Ora, $P(A) + P(B) = 0,45 + 0,75 = 1,2$ e $P(A) < P(B)$, pelo que:

$$0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,45$$

Por outro lado, temos que:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0,75 - P(A \cap B)$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} 0,2 &\leq P(A \cap B) \leq 0,45 \\ \Leftrightarrow -0,45 &\leq -P(A \cap B) \leq -0,2 \\ \Leftrightarrow 0,75 - 0,45 &\leq 0,75 - P(A \cap B) \leq 0,75 - 0,2 \\ \Leftrightarrow 0,3 &\leq 0,75 - P(A \cap B) \leq 0,55 \end{aligned}$$

Das quatro opções, apenas 0,35 é um valor que verifica esta condição.

Resposta: **(B)**

9.

$$u_n = \frac{n-1}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2} \qquad \begin{array}{r} n-1 \mid n+2 \\ -n-2 \quad 1 \\ \hline -3 \end{array}$$

Assim, vem que: $\lim u_n = \lim \left(1 - \frac{3}{n+2}\right) = 1^-$.

Daqui resulta que $\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

Resposta: **(D)**

10.

10.1.

Como a superfície esférica tem centro no ponto C e passa no ponto G , o comprimento do raio é

$$\begin{aligned} r = \overline{CG} &= \sqrt{(4-2)^2 + (2-18)^2 + (-6-2)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-16)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{4 + 256 + 64} \\ &= \sqrt{324} \\ &= 18 \end{aligned}$$

Como as coordenadas do centro são $(4, 2, -6)$, a equação da superfície esférica é

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 = 324$$

Resposta: **(B)**

10.2.

O ponto E resulta da interseção da reta AE com o plano EFG .

Determinemos uma equação do plano EFG .

A reta AE é perpendicular ao plano EFG e um vetor diretor desta reta tem coordenadas $(-1, 8, 4)$, pelo que, um vetor normal deste plano pode ter coordenadas $(-1, 8, 4)$.

O ponto $G(2, 18, 2)$ pertence ao plano EFG , pelo que, podemos obter uma equação cartesiana deste plano.

Assim vem que:

$$\begin{aligned} -1(x-2) + 8(y-18) + 4(z-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x + 2 + 8y - 144 + 4z - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow -x + 8y - 4z - 150 &= 0 \end{aligned}$$

Vamos, agora, obter a interseção da reta AE com o plano EFG , ou seja, as coordenadas do ponto E .

$$\begin{cases} x = 7 - k \\ y = 5 + 8k \\ z = 9 + 4k \\ -x + 8y + 4z - 150 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - k \\ y = 5 + 8k \\ z = 9 + 4k \\ -(7 - k) + 8(5 + 8k) + 4(9 + 4k) - 150 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - k \\ y = 5 + 8k \\ z = 9 + 4k \\ -7 + k + 40 + 64k + 36 + 16k - 150 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - k \\ y = 5 + 8k \\ z = 9 + 4k \\ 81k - 81 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - k \\ y = 5 + 8k \\ z = 9 + 4k \\ k = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 13 \\ z = 13 \\ k = 1 \end{cases}$$

Logo, $E(6, 13, 13)$.

FIM