12º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 1 | 2022

António Leite

1.

$$\begin{aligned}
& \left[A \cup \left(\overline{B} \cap \overline{A}\right)\right] \cap \left(\overline{A \setminus \overline{B}}\right) \\
= & \left[\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(A \cup \overline{A}\right)\right] \cap \left(\overline{A \cap B}\right) \\
= & \left[\left(A \cup \overline{B}\right) \cap U\right] \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\
= & \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\
= & \overline{B} \cup \left(A \cap \overline{A}\right) \\
= & \overline{B} \cup \emptyset \\
= & \overline{B}
\end{aligned}$$

2.

Utilizando os algarismos do número 1233355 temos 3 possibilidades para escrever um número ímpar:

- Casos em que o 1 é o algarismo das unidades: $\dfrac{6!}{3!2!} = 60$
- Casos em que o 5 é o algarismo das unidades: $\dfrac{6!}{3!} = 120$
- Casos em que o 3 é o algarismo das unidades: $\dfrac{6!}{2!2!} = 180$

Assim, temos $60 + 120 + 180 = 360$ números ímpares.

3.

$$\begin{aligned}
T_{p+1} = & \ {}^{8}C_p \left(\frac{1}{x^2}\right)^{8-p} \left(-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^p \\
= & \ {}^{8}C_p \left(x^{-2}\right)^{8-p} \left(-\frac{1}{2}\right)^p \left(\sqrt[3]{x}\right)^p \\
= & \ {}^{8}C_p x^{-16+2p} \left(-\frac{1}{2}\right)^p x^{\frac{p}{3}} \\
= & \ {}^{8}C_p \left(-\frac{1}{2}\right)^p x^{-16+\frac{7}{3}p}
\end{aligned}$$

Como se pretende o coeficiente, k, do termo de grau -2:

$-16+\frac{7}{3}p=-2 \Leftrightarrow \frac{7}{3}p=14 \Leftrightarrow p=6$

Assim, $T_7={}^8C_6\left(-\frac{1}{2}\right)^6 x^{-2}=\frac{7}{16}x^{-2}$, logo $k=\frac{7}{16}$.

4.

4.1.

$C =$ Centro da circunferência de diâmetro $[AB]$ = Ponto médio $[AB]$

$C\left(\frac{-3+1}{2},\frac{6+4}{2}\right) \Leftrightarrow C(-1,5)$

raio $= d(A,C)=\sqrt{(-1+3)^2+(5-6)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

Logo, a equação pedida é $(x+1)^2+(y-5)^2=5$.

4.2.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{t}=0 &\Leftrightarrow (2a+1,-6)\cdot(3,b)=0\\ &\Leftrightarrow 6a+3-6b=0\\ &\Leftrightarrow 2a+1-2b=0\\ &\Leftrightarrow 2a=2b-1\\ &\Leftrightarrow a=b-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Opção **(C)**

5.

5.1.

Temos 4 possibilidades para formar uma comissão nestas condições:

- Com exatamente dois alunos que não fazem os trabalhos de casa: ${}^9C_2\times{}^5C_3$
- Com exatamente três alunos que não fazem os trabalhos de casa: ${}^9C_3\times{}^5C_2$
- Com exatamente quatro alunos que não fazem os trabalhos de casa: ${}^9C_4\times{}^5C_1$
- Com exatamente cinco alunos que não fazem os trabalhos de casa: ${}^9C_5$

Assim, no final temos: ${}^9C_2\times{}^5C_3+{}^9C_3\times{}^5C_2+{}^9C_4\times{}^5C_1+{}^9C_5=1956$ comissões possíveis.

5.2. Há exatamente 3 raparigas e 11 rapazes logo:

•_•_•_•_•_•_•_•_•_•_•_•

Temos 11! maneiras de dispor os rapazes (linhas horizontais) e, de forma, a não ficarem duas raparigas juntas, terá de ficar sempre, pelo menos, um rapaz entre elas. Assim, há 12 lugares onde as raparigas podem ficar (pontinhos) e, como são 3 raparigas, há ${}^{12}A_3$ maneiras de colocar as raparigas nestas condições.
Assim, uma expressão possível é $11!\times{}^{12}A_3$.

6.

$$\begin{aligned}
&\left(1+n+{}^{n}C_2\right)\times 2=134\\
\Leftrightarrow\ & 1+n+{}^{n}C_2=67\\
\Leftrightarrow\ & n+{}^{n}C_2=66\\
\Leftrightarrow\ & n+\frac{n!}{2!(n-2)!}=66\\
\Leftrightarrow\ & n+\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}=66\\
\Leftrightarrow\ & n+\frac{n(n-1)}{2}=66\\
\Leftrightarrow\ & n+\frac{n^2-n}{2}=66\\
\Leftrightarrow\ & 2n+n^2-n=132\\
\Leftrightarrow\ & n^2+n-132=0\\
\Leftrightarrow\ & n=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(-132)}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & n=\frac{-1-23}{2}\vee n=\frac{-1+23}{2}\\
\Leftrightarrow\ & n=-12\vee n=11
\end{aligned}$$

Como $n\in\mathbb{N}\wedge n\geq 2\Rightarrow n=11$

Linha: 11
Linha seguinte: 12
Maior elemento da linha seguinte: ${}^{12}C_6=924$

7.

3! é o número de maneiras diferentes de dispor as bolas vermelhas e, para cada uma destas maneiras, há 5! maneiras diferentes de dispor as bolas azuis e, para cada uma destas, há 6! maneiras de dispor o bloco das bolas vermelhas, o bloco das bolas azuis e as quatro bolas verdes.

Assim, temos que $3!\times 5!\times 6!$ é o número de maneiras diferentes que é possível colocar as bolas, de modo que, as bolas vermelhas fiquem todas juntas, assim como as bolas azuis.

Opção: **(B)**

8.

8.1.

Temos duas possibilidades:

- O zero é o algarismo das unidades: $9\times 8\times 7\times 6\times 1$
- O zero não é o algarismo das unidades: $8\times 8\times 7\times 6\times 4$

Assim temos: $9\times 8\times 7\times 6\times 1+8\times 8\times 7\times 6\times 4=13776$ números pares.

8.2.

- Números entre $45130 - 45200$: $1 \times 1 \times 1 \times 5 \times 6 - 1 = 29$ (Tem de se subtrair um: o número 45130)
- Números entre $45200 - 46000$: $1 \times 1 \times 6 \times 7 \times 6 = 252$
- Números entre $46000 - 50000$: $1 \times 4 \times 8 \times 7 \times 6 = 1344$
- Números entre $50000 - 99999$: $5 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 15120$

Logo, temos $29 + 252 + 1344 + 15120 = 16745$ números de cinco algarismos diferentes superiores a 45130.

9.

$$
\begin{aligned}
& {}^{2n}C_2 + {}^{8}A'_2 = {}^{3n}A_2 - 3 \times 5! - {}^{8}C_7 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} + 64 = \frac{(3n)!}{(3n-2)!} - 3 \times 120 - 8 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{2!(2n-2)!} + 64 = \frac{(3n)(3n-1)(3n-2)!}{(3n-2)!} - 360 - 8 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(2n)(2n-1)}{2!} + 64 = (3n)(3n-1) - 360 - 8 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4n^2 - 2n}{2} + 64 = 9n^2 - 3n - 368 \\
\Leftrightarrow\ & 2n^2 - n + 64 = 9n^2 - 3n - 368 \\
\Leftrightarrow\ & 7n^2 - 2n - 432 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & n = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-432)}}{2(7)} \\
\Leftrightarrow\ & n = \frac{2 \pm \sqrt{12100}}{14} \\
\Leftrightarrow\ & n = \frac{2 - 110}{14} \vee n = \frac{2 + 110}{14} \\
\Leftrightarrow\ & n = -\frac{108}{14} \vee n = \frac{112}{14} \\
\Leftrightarrow\ & n = -\frac{57}{7} \vee n = 8
\end{aligned}
$$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 8$.

10.

${}^{4}C_2 \times {}^{10}C_8 \times {}^{10}C_1 \times {}^{11}C_2 \times {}^{9}C_3 = 12474000$.

FIM