PLANO α

PROPOSTA RESOLUÇÃO PROVA 2 | 2022

António Leite

1.

1.1. A base da pirâmide é um quadrado de lado 2, pelo que a diagonal desse quadrado mede $2\sqrt{2}$ unidades, já que, pelo Teorema de Pitágoras:

$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 \Leftrightarrow 2^2 + 2^2 = \overline{BD}^2 \Leftrightarrow 8 = \overline{BD}^2$, como $\overline{BD} > 0$, $\overline{BD} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ora, se $\overline{BD} = 2\sqrt{2}$, então $\overline{DO} = \sqrt{2}$, pelo que, $A(\sqrt{2}, 0, 0)$ e $D(0, 0, \sqrt{2})$.
Ainda, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$\overline{DV}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{OV}^2 \Leftrightarrow (\sqrt{38})^2 = (\sqrt{2})^2 + \overline{OV}^2 \Leftrightarrow 38 = 2 + \overline{OV}^2 \Leftrightarrow \overline{OV}^2 = 36$, como $\overline{OV} > 0$, $\overline{OV} = 6$ e, consequentemente, $V(0, 6, 0)$.
Para determinar uma equação do plano ADV, vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano ADV:

$\overrightarrow{VD} = (0, -6, \sqrt{2})$ e $\overrightarrow{VA} = (\sqrt{2}, -6, 0)$

Podemos, agora, determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano, que é um vetor normal ao plano ADV.
Seja $\vec{n}(a, b, c)$ esse vetor.

$$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(0,-6,\sqrt{2}) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(\sqrt{2},-6,0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6b + \sqrt{2}c = 0 \\ \sqrt{2}a - 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}c = 6b \\ \sqrt{2}a = 6b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{6}{\sqrt{2}}b \\ a = \dfrac{6}{\sqrt{2}}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3\sqrt{2}b \\ a = 3\sqrt{2}b \end{cases}$$

Portanto, $\vec{n}(3\sqrt{2}b, b, 3\sqrt{2}b)$, com $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Seja, por exemplo, $b = \sqrt{2}$, então $\vec{n}(6, \sqrt{2}, 6)$, pelo que a equação do plano ADV é da forma $6x + \sqrt{2}y + 6z + d = 0$.

Como $A(\sqrt{2},0,0)$ pertence ao plano ADV, vem que:

$6\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 0+6\times 0+d=0 \Leftrightarrow d=-6\sqrt{2}$.
E assim, uma equação do plano ADV é

$$6x+\sqrt{2}y+6z-6\sqrt{2}=0$$

Resposta: **(B)**

1.2. Ora, temos que as coordenadas do ponto V são $(0,6,0)$.
Assim, $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OV},\ k\in\mathbb{R}^- \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=k(0,6,0),\ k\in\mathbb{R}^- \Leftrightarrow P=(0,6k,0),\ k\in\mathbb{R}^-$.
Como $P(0,6k,0),\ k\in\mathbb{R}^-$, então P pertence ao semieixo negativo Oy, pelo que:

$A_{\Delta[DPV]}=\dfrac{\overline{PV}\times\overline{OD}}{2}$, assim vem que:

$\sqrt{32}=\dfrac{\overline{PV}\times\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{PV}=\dfrac{2\sqrt{32}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{PV}=2\sqrt{16} \Leftrightarrow \overline{PV}=8$.

Como $P(0,6k,0),\ k\in\mathbb{R}^-$ e $V(0,6,0)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\overline{PV}=8 \Leftrightarrow\ & \sqrt{(0-0)^2+(6-6k)^2+(0-0)^2}=8\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(6-6k)^2}=8\\
\Leftrightarrow\ & |6-6k|=8\\
\Leftrightarrow\ & 6-6k=8 \vee 6-6k=-8\\
\Leftrightarrow\ & 6k=-2 \vee 6k=14\\
\Leftrightarrow\ & k=-\frac{1}{3} \vee k=\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Como $k\in\mathbb{R}^-$, então $k=-\dfrac{1}{3}$, pelo que $P(0,-2,0)$.

2.

Verifica-se que:
$\cos(-\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$ e $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha-2\pi\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
& -\cos(-\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{12}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & -(-\cos\alpha)+\cos\alpha=\frac{\sqrt{12}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \cos\alpha+\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos\alpha=\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow\ & \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Ora, como $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[\Rightarrow \alpha = -\dfrac{\pi}{6}$.

Por outro lado, o ponto A tem coordenadas $(\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha)$, ou seja:

$$\left(\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), \sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Assim, temos que a área do triângulo $[ABO]$ é:

$$\begin{aligned} A_{[ABO]} &= \frac{\overline{AB}\times(\text{simétrico da ordenada de } A)}{2} \\ &= \frac{\left(2\times\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\times\left(-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{12}}{2}}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

A área do setor circular BOC é igual a $\dfrac{\alpha r^2}{2}$, sendo $\alpha = \left|-\dfrac{\pi}{6}\right|$ e $r = \sqrt{2}$.

Logo, $A_{\text{setor circular } BOC} = \dfrac{\frac{\pi}{6}\times(\sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{6}\times 2}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.

Finalmente, temos que:

$A_{\text{região sombreada}} = A_{[ABO]} + A_{\text{setor circular } BOC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\sqrt{3}+\pi}{6}$.

3.

Para definir um triângulo são necessários três pontos não colineares. Desta forma, para definir um triângulo com três dos pontos assinalados nas duas retas é necessário selecionar dois pontos da reta r e um ponto da reta s, ou em alternativa, selecionar um ponto da reta r e dois pontos da reta s.

Ora, excluindo o ponto A é possível definir:

- ${}^3C_2 \times {}^4C_1 = 12$ triângulos, com dois pontos da reta r e um ponto da reta s;
- ${}^3C_1 \times {}^4C_2 = 18$ triângulos, com um ponto da reta r e dois pontos da reta s.

Por outro lado, sendo A um dos vértices do triângulo, temos de selecionar um ponto da reta r (distinto de A) e outro ponto da reta s (igualmente distinto de A), isto é

$$1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_1 = 12$$

Portanto é possível definir exatamente $12+18+12 = 42$ triângulos.

4.

Ora, $P(B|A)$ é a probabilidade do limite da sucessão ser igual a $-\infty$, sabendo que a sucessão é divergente.

- $\lim\left[\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \ln\left(\frac{1}{+\infty}\right) = \ln(0^+) = -\infty$
- $\lim(2-n) = -\infty$
- $\lim(e^{3-n}) = e^{-\infty} = 0$
- $\lim\left(\frac{3}{n-4}\right) = 0$
- $\lim\left(\frac{\pi}{3}\right)^n = +\infty$
- $\lim\left(\frac{n^2+2}{1-n}\right) = \lim\left(\frac{n^2}{-n}\right) = \lim(-n) = -\infty$
- $\lim(-1)^n$, não existe
- $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Portanto, as sucessões divergentes são 5 (são aquelas cujo limite não é um número real) e, destas, 3 têm como limite $-\infty$, pelo que recorrendo à Regra de Laplace, temos 3 casos favoráveis e 5 casos possíveis, logo $P(B|A) = \frac{3}{5}$.

Resposta: **(D)**

5.

Como o Gustavsson deverá integrar o grupo e este deverá ter exatamente três suecos, sendo o Gustavsson sueco, resta selecionar mais dois voluntários suecos, pelo que o número de formas diferentes de selecionar dois dos restantes sete suecos é igual a ${}^7C_2$.

Falta, ainda selecionar cinco voluntários, sendo que destes, pelo menos, dois devem ser angolanos.

Assim, tem-se quatros casos, mutuamente exclusivos, a saber:

- exatamente dois angolanos e três portugueses ou italianos, pois já não podem ser suecos. O número de maneiras diferentes de selecionar dois dos 13 angolanos e três dos 29 portugueses e italianos (há 17 portugueses e 12 italianos) é ${}^{13}C_2 \times {}^{29}C_3$;
- exatamente três angolanos e dois portugueses ou italianos $\left({}^{13}C_3 \times {}^{29}C_2\right)$;
- exatamente quatro angolanos e um português ou italiano $\left({}^{13}C_4 \times {}^{29}C_1\right)$;
- exatamente cinco angolanos $\left({}^{13}C_5\right)$.

Portanto, o número de casos favoráveis é

$$1 \times {}^7C_2 \times \left({}^{13}C_2 \times {}^{29}C_3 + {}^{13}C_3 \times {}^{29}C_2 + {}^{13}C_4 \times {}^{29}C_1 + {}^{13}C_5\right)$$

Por outro lado, o número de casos possíveis é ${}^{50}C_8$ pois pretende-se selecionar, ao acaso, 8 voluntários de 50.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade pedida é:

$$\frac{1 \times {}^{7}C_2 \times \left({}^{13}C_2 \times {}^{29}C_3 + {}^{13}C_3 \times {}^{29}C_2 + {}^{13}C_4 \times {}^{29}C_1 + {}^{13}C_5\right)}{{}^{50}C_8} \approx 2\%$$

6.

Ora, sendo z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 cinco termos consecutivos de uma progressão aritmética e considerando r a razão dessa progressão, temos que $z_1 = z_3 - 2r$; $z_2 = z_3 - r$; $z_4 = z_3 + r$ e $z_5 = z_3 + 2r$, pelo que:

$$\begin{aligned} & z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 30 + 15i \\ \Leftrightarrow\ & z_3 - 2r + z_3 - r + z_3 + z_3 + r + z_3 + 2r = 30 + 15i \\ \Leftrightarrow\ & 5z_3 = 30 + 15i \\ \Leftrightarrow\ & z_3 = \frac{30}{5} + \frac{15}{5}i \\ \Leftrightarrow\ & z_3 = 6 + 3i \end{aligned}$$

Por outro lado, o inverso de z_3 é $\frac{1}{z_3}$, logo o módulo do inverso de z_3 é igual a $\frac{|1|}{|z_3|}$, ou seja:

$$\frac{1}{\sqrt{6^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{36+9}} = \frac{1}{\sqrt{45}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3 \times 5} = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

Resposta: **(B)**

7.

Como (u_n) é uma progressão geométrica, temos que:

$$u_5 = u_2 \times r^3 \Leftrightarrow \frac{2}{27} = 2 \times r^3 \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$$

E assim, vem que:

$$u_2 = u_1 \times r \Leftrightarrow 2 = u_1 \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow u_1 = 6$$

Por outro lado, temos que:

$S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, isto é:

$$S_n = 6 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow S_n = 6 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}\right) \Leftrightarrow S_n = 6 \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \Leftrightarrow S_n = 9 \times \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_n = 9 - \frac{9}{3^n}$$

Portanto, $|S_n - 9| < 10^{-4}$ é equivalente a:

$$\left|9-\frac{9}{3^n}-9\right| < 10^{-4} \Leftrightarrow \left|-\frac{9}{3^n}\right| < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{9}{3^n} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{3^n}{9} > 10^4 \Leftrightarrow 3^n > 9\times 10^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^n > 3^{\log_3(9\times 10^4)} \Leftrightarrow n > \log_3(9\times 10^4)$$

Ora, $\log_3(9\times 10^4) \approx 10,38$. Como n deve ser natural e maior que $10,38$, o menor número natural nestas condições é o 11.

8.

Simplificando z_1 temos que:

$$z_1 = \sin a + \sin\left(-\frac{\pi}{2}+a\right) + bi \Leftrightarrow z_1 = \sin a - \cos a + bi$$

Simplicando z_2, temos que:

$$z_2 = \frac{(2-i)^2+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{1-2i^9} + 3i^{31}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{4-4i+i^2+\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{1-2i} + 3i^3$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{4-4i-1+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1-2i} - 3i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{3-4i+1+i}{1-2i} - 3i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{4-3i}{1-2i} - 3i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{4-3i-3i(1-2i)}{1-2i}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{4-3i-3i+6i^2}{1-2i}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{-2-6i}{1-2i}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{(-2-6i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{-2-4i-6i-12i^2}{1-4i^2} \Leftrightarrow z_2 = \frac{10-10i}{5} \Leftrightarrow z_2 = 2-2i$$

Assim, vem que:

$$z_1 = \frac{z_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin a - \cos a + bi = \frac{2-2i}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin a - \cos a + bi = 1 - i$$

$$\Leftrightarrow \sin a - \cos a = 1 \wedge b = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin a - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge b = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin a - \sin\frac{\pi}{4}\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge b = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge b = -1$$

$$\Leftrightarrow a - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee a - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge b = -1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee a = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge b = -1$$

Como $a \in [0, 2\pi[$, então $\left(a = \frac{\pi}{2} \vee a = \pi\right) \wedge b = -1$.

9.

Temos que:

$$z_1 = -4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -1 \times 4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\pi} \times 4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Em relação a z_2 tem-se que:

- $|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- $\tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 2^{\text{o}}\, Q \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $z_2 = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$.

Portanto $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}{2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Assim, vem que:

$$|z| \times z^2 = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow |z| \times \left(|z|e^{i\theta}\right)^2 = 2^3 e^{i\left(-\frac{\pi}{6} \times 3\right)}$$

$$\Leftrightarrow |z| \times \left(|z|^2 e^{i(2\theta)}\right) = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^3 = 8 \wedge 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \ |z| = 2 \wedge \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \ z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \vee z = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \ z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \vee z = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \ z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \vee z = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \ z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \vee z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

10.

10.1. Como a função f é contínua em $x = 4$, temos que:

$$f(4) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

Assim, vem que:

- $f(4) = 4e^{4-4} = 4e^0 = 4 \times 1 = 4$
- $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (xe^{x-4}) = 4$
- $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\ln(x-3)} + k\right) = \frac{0}{0} + k$ (indeterminação)

Pelo que se tem:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\ln(x-3)} + k\right) =$$

$$= k + \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x}-2}{\ln(x-3)}$$

$$= k + \lim_{x\to 4^+} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\ln(x-3)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= k + \lim_{x\to 4^+} \frac{x-4}{\ln(x-3)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= k + \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{\sqrt{x}+2} \times \lim_{x\to 4^+} \frac{x-4}{\ln(x-3)}$$

$$\overset{(1)}{=} k + \frac{1}{4} \times \lim_{y\to 0^+} \frac{(e^y+3)-4}{y} = k + \frac{1}{4} \times \lim_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y}$$

$$= k + \frac{1}{4} \times 1 = k + \frac{1}{4}$$

(1) Fazendo $y = \ln(x-3)$, temos que $\ln(e^y) = \ln(x-3) \Leftrightarrow e^y = x-3 \Leftrightarrow e^y + 3 = x$
Se $x \to 4^+ \Rightarrow y \to 0^+$

Como a função f é continua em $x=4$, podemos determinar o valor de k:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow k+\frac{1}{4} = 4 \Leftrightarrow k = 4-\frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \frac{15}{4}.$$

10.2. Começamos por determinar a expressão da primeira derivada da função f, em $[-10,4[$:

$$\begin{aligned} f'(x) =& (xe^{x-4})' = (x)'e^{x-4} + x(e^{x-4})' \\ =& \ e^{x-4} + x(x-4)'e^{x-4} = e^{x-4} + xe^{x-4} \\ =& \ e^{x-4}(1+x) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da primeira derivada da função f em $[-10,4[$, temos:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x-4}(1+x)=0 \Leftrightarrow e^{x-4}=0 \vee 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$, pois $e^{x-4}=0$ é uma condição impossível.

Estudando a variação de sinal da primeira derivada da função f e relacionando com a monotonia da função f, temos que:

x	-10		-1		4
sinal de f'	$-$	$-$	0	$+$	n.d.
variação de f	máx	$\searrow$	mín	$\nearrow$	n.d.

Temos, então que:

- f é crescente no intervalo $[-1,4[$
- f é decrescente no intervalo $[-10,-1]$
- tem um máximo relativo que é $f(-10)=-10e^{-14}$ e um mínimo relativo que é $f(-1)=-e^{-5}$.

11.

Começamos por determinar a expressão da segunda derivada da função h:

$$\begin{aligned} h''(x) =& (\sin^2(x) - x\cos(x))' = (\sin^2 x)' - (x\cos x)' \\ =& \ 2\sin x(\sin x)' - ((x)'\cos x + x(\cos x)') \\ =& \ 2\sin x\cos x - (\cos x + x(-\sin x)) \\ =& \ 2\sin x\cos x - (\cos x - x\sin x) \\ =& \ 2\sin x\cos x - \cos x + x\sin x \end{aligned}$$

Pretende-se mostrar que $\exists c \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[: \ h''(c)=0$.

Como h'' resulta de operações sucessivas de funções contínuas no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ então é contínua neste intervalo.

Determinemos, agora, $h''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ e $h''(0)$:

$$\begin{aligned} h''\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2(-1)(0) - 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(-1) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$h''(0) = 2\sin 0\cos 0 - \cos 0 + 0\sin 0 = 2(0)(1) - 1 + 0 = -1$$

Como h'' é contínua no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e $h''(0) < 0 < h''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, então pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que $\exists c \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\, : \, h''(c) = 0$, ou seja, a segunda derivada de h admite, pelo menos um zero no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

12.

Como a função g é contínua no seu domínio (resulta do produto de funções contínuas), as retas de equação $x = -\frac{1}{e}$ e $x = 0$ são as únicas candidatas a assíntota vertical ao gráfico de g.

Para averiguar estas hipóteses vamos calcular $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{e}^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.

$$\lim_{x \to -\frac{1}{e}^-} g(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{e}^-} \left[x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)\right] = -\frac{1}{e}\ln(0^+) = -\frac{1}{e}(-\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} g(x) &= \lim_{x \to 0^+} \left[x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)\right] \overset{(1)}{=} \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{e^y - e} \times y\right) = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y - e} = \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y - e}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y \to +\infty}\left(\frac{e^y}{y}\right) - \lim\limits_{y \to +\infty}\left(\frac{e}{y}\right)} = \frac{1}{+\infty - 0} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

(1) Fazendo $y = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$, tem-se que:

$\ln(e^y) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow e^y = e + \frac{1}{x} = e^y - e = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^y - e}$

Se $x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$

Como $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{e}^-} g(x) = +\infty$, então a reta de equação $x = -\frac{1}{e}$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

Por outro lado, como $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$ (é um número real), então a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de g.

13.

13.1. A massa inicial é igual a m_0. Assim, equacionando o problema e resolvendo a equação vem que:

$$m(t)=\frac{m_0}{2} \Leftrightarrow m_0e^{-kt}=\frac{m_0}{2} \Leftrightarrow e^{-kt}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-kt}=e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow -kt=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t=-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad t=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow t=\frac{1}{k}\ln(2) \Leftrightarrow t=\frac{\ln(2)}{k}$$

Resposta: **(D)**

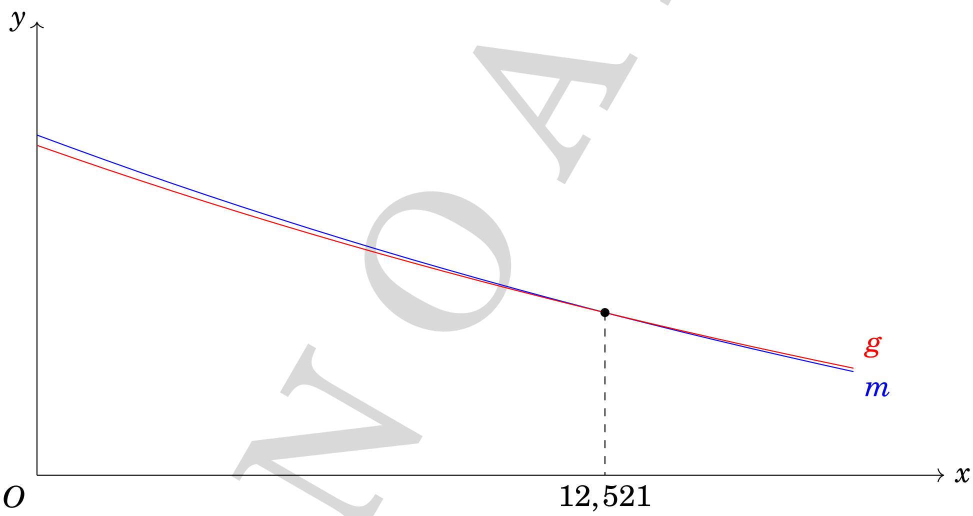
13.2. Como no instante t_1 havia mais 20 gramas dessa substância radioativa do que dois milénios depois desse instante, temos que:

$$m(t_1)=m(t_1+2)+20$$

Dessa forma, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções

$$m(t)=500e^{-0,03t} \text{ e } g(t)=500e^{-0,03(t+2)}+20$$

temos:



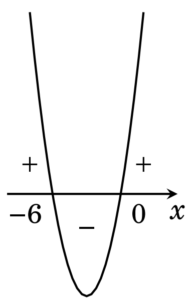
O ponto relevante tem coordendadas $(12,521;343,433)$, a abcissa é o valor de t_1, pelo que $t_1 \approx 12,52$.
Resposta: 12,52 milénios.

14.

Determinando o domínio da condição temos:

$$D=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+6x>0\}=]-\infty,-6[\cup]0,+\infty[$$

$$x^2+6x=0 \Leftrightarrow x(x+6)=\Leftrightarrow x=0 \lor x+6=0 \Leftrightarrow x=0 \lor x=-6$$

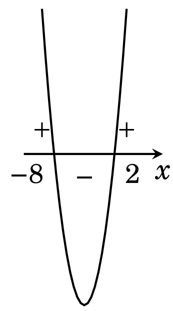


Resolvendo a condição temos:

$$3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x)} \geq \frac{1}{81} \wedge x \in D$$
$$\Leftrightarrow\ 3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x)} \geq 3^{-4} \wedge x \in D$$
$$\Leftrightarrow\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x) \geq -4 \wedge x \in D$$
$$\Leftrightarrow\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \wedge x \in D$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+6x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \wedge x \in D$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+6x \leq 2^4 \wedge x \in D$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+6x-16 \leq 0 \wedge x \in D$$
$$\Leftrightarrow\ -8 \leq x \leq 2 \wedge (x < -6 \vee x > 0)$$
$$\Leftrightarrow\ -8 \leq x < -6 \vee 0 < x \leq 2$$

C.A.

$$x^2+6x-16=0$$
$$\Leftrightarrow\ x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\times 1\times(-16)}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ x = \frac{-6 \pm 10}{2} \Leftrightarrow x = -8 \vee x = 2$$



C.S= $[-8,-6[\cup]0,2]$

15.

A área do setor circular AOB é igual a $\frac{5\pi}{24}$ unidades de área. Sendo α a amplitude do ângulo AOB temos que $\frac{\alpha r^2}{2} = \frac{5\pi}{24}$, como $r = 1$, vem que:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{5\pi}{24} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{12}$$

Portano, $A\hat{O}B = A\hat{O}P = \frac{5\pi}{12}$ rad.

Como o ponto P pertence às retas r e t e a amplitude do ângulo AOP é $\frac{5\pi}{12}$ rad, então as coordenadas do ponto P são $\left(1, \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$.

Portanto, a ordenada do ponto P é igual a $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Calculemos o valor de $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \times \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}{6-2} = \frac{8+2\sqrt{12}}{4} = \frac{8+2(2\sqrt{3})}{4}$$

$$= \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

Portanto, a ordenada do ponto P é $2\sqrt{3}$. (c.q.m)

FIM