Prova Modelo Exame Final de Matemática A

Prova 1 | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

António Leite

Última atualização em 13/06/2022

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância 30 minutos. | 5 Páginas.

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado a cor vermelha, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

O formulário pode ser visto *aqui*.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o vértice B pertence ao eixo Oy;
- o vértice A tem coordenadas $(4, 5, 0)$;
- o vértice G tem abcissa 3 e ordenada 12;
- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy;
- o plano BDH é definido pela equação $x - 7y + 56 = 0$.

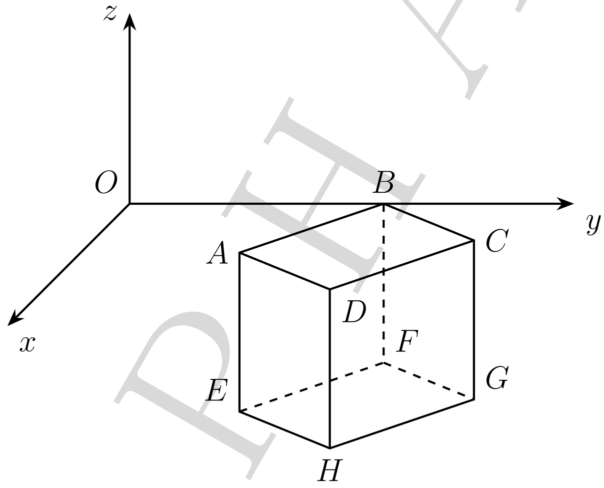

Figura 1

1.1. Qual das equações seguintes define a superfície esférica de diâmetro $[EC]$?

(A) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

(B) $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$

(C) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$

(D) $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

1.2. Seja P o ponto de interseção da reta EH com o plano de equação $y = -3$.
Determine a amplitude do ângulo OPG.
Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Considere um polígono regular de 24 lados inscrito numa circunferência de centro no ponto O.
Sabe-se que:

- A e B são vértices consecutivos desse polígono;
- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \dfrac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$.

O perímetro desta circunferência é igual a:

(A) 2π **(B)** $2\sqrt{2}\pi$ **(C)** 4π **(D)** $3\sqrt{2}\pi$

3. Considere todos os números naturais inferiores a 4000.

Destes números, quantos são pares e têm os algarismos todos diferentes?

(A) 1249 **(B)** 1157 **(C)** 1120 **(D)** 840

4. Os jogos Olímpicos de Verão são um evento multidesportivo global com diversas modalidades, em que participam diversos países do mundo, incluindo Portugal. Estes jogos são, normalmente, realizados a cada quatro anos.

As diversas comitivas portuguesas que já participaram nestes jogos, incluindo os de Tóquio 2020, já angariaram diversas medalhas, sendo cinco de ouro, catorze de bronze e algumas de prata. Estas medalhas, que são todas diferentes, vão ser colocadas em fila, umas a seguir às outras, numa vitrine, para serem expostas aos portugueses.

Sabe-se que a probabilidade de ficar uma medalha de ouro em cada uma das pontas (extremos) é igual a $\dfrac{5}{189}$.

Determine o número de medalhas de prata.

5. O Plano Alpha é uma empresa de estudos matemáticos.

Dos funcionários do Plano Alpha, sabe-se que:

- 88% estão vacinados contra a covid-19;
- Se o funcionário está vacinado contra a covid-19, a probabilidade de ele ter menos de 40 anos de idade é $\frac{2}{11}$.
- Se o funcionário não está vacinado contra a covid-19, a probabilidade de ele ter menos de 40 anos de idade é $\frac{2}{3}$.

Determine a probabilidade de um desses funcionários, escolhido ao acaso, estar vacinado contra a covid-19, sabendo que tem idade não inferior a 40 anos.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. Seja (u_n) uma progressão aritmética.

Sabe-se que $u_3 = a + 1$ e $u_5 = 2a + 4$, sendo a um número real.

Sabe-se, ainda, que a soma dos treze primeiros termos de (u_n) é igual a 208.

Qual é o valor da razão desta progressão?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 7

7. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \times 6n}{1 + 2n}$.

Prove que a sucessão (u_n) é limitada e indique o conjunto de todos os minorantes e o conjunto de todos os majorantes.

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = e^{i\theta}$ com $\theta \in]0, \pi]$.

O número complexo $z_2 = z_1 + 1$, na forma trigonométrica, pode ser representado por:

(A) $2\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ **(C)** $2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$

(B) $2\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\theta}$ **(D)** $2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\theta}$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \frac{1+i}{i} + \frac{i}{1+i} + i^{31} \text{ e } z_2 = -\sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$$

Determine o menor número natural n para o qual $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ é um número real positivo.

10. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 e^{x-2} & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{\ln(x-1)}{x^2+x-6} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

10.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 2$.

10.2. Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico, em $]-\infty, 2[$ e, caso exista, escreva a sua equação reduzida.

11. Seja f uma função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- f é uma função ímpar;
- a reta de equação $y = -2x + 3$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$.

Prove que o gráfico de f admite uma assíntota oblíqua em $-\infty$ e escreva a sua equação reduzida.

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada h', de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por

$$h'(x) = 1 - (\ln(x) - 1)^2$$

Estude a função h quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de h tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de h tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de h.

13. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são solução da inequação:

$$\ln\left(\frac{e^x - 2}{1 - 3e^x}\right) \leq 0$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

14. Na figura 2, estão representados, num referencial o.n xOy, o circunferência de centro O e raio 2.
Sabe-se que:

- Os pontos A e C têm coordenadas $(2, 0)$ e $(-2, 0)$, respetivamente;
- o ponto B desloca-se ao longo do arco AC, no primeiro e segundo quadrantes, sem nunca coincidir com os pontos A e C;
- α é a amplitude do ângulo orientado cujo lado de origem é o semieixo positivo Ox e cuja lado extremidade é a semirreta $\dot{O}B$.

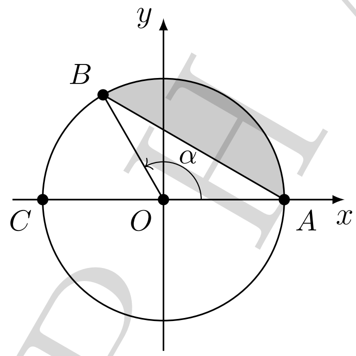

Figura 2

14.1. Qual o perímetro do triângulo $[AOB]$ quando a reta OB tem declive $-\frac{\sqrt{3}}{3}$?

(A) $2\sqrt{3}+4$ **(B)** $4+2\sqrt{\sqrt{3}+2}$ **(C)** $4\sqrt{2+\sqrt{3}}+2$ **(D)** $6\sqrt{2+\sqrt{3}}$

14.2. Seja $A(\alpha)$ a área da região sombreada em função de α. Sabe-se que quando o ângulo α duplica a área da região sombreada quadruplica.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, esse valor de α, sabendo que existe e é único.

Apresente o resultado em radianos, arredondado às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) vizualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondado(s) às milésimas.
  Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

15. Considere a função f, de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = 2\cos x(1+\sin(x))$.

Sejam, num referencial ortonormado do plano, A e B os pontos em que as suas ordenadas são extremos relativos de f, sendo A o ponto de maior ordenada e B o ponto de menor ordenada.

Sabe-se que $[ABCD]$ é um trapézio sendo que C e D pertencem ao eixo Oy e têm a mesma ordenada que A e B, respetivamente.

Determine o valor exato da área do trapézio $[ABCD]$.

FIM

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1**	**1.2**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**14.1.**	**14.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação	**2.**	**5.**	**7.**	**11.**	**12.**	**13.**							**Subtotal**
Cotação em pontos	3×14												**42**
TOTAL													**200**