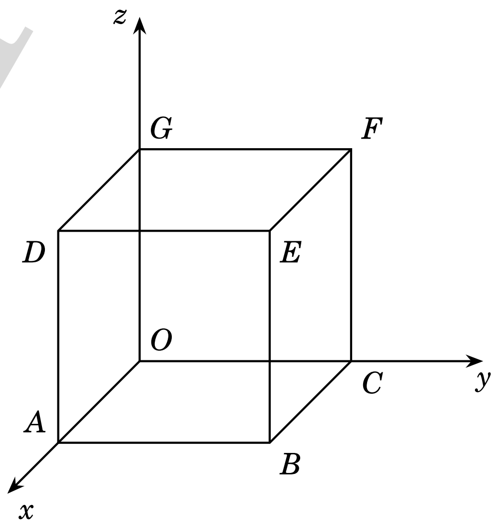
PLANO α

10º ANO | FICHA 14 | 2022

António Leite

1. Na figura está representado um cubo $[OABCDEFG]$.
Sabe-se, fixado, um referencial ortonormado do espaço que:



- O vértice O coincide com a origem do referencial e os vértices A, C e G pertencem aos eixos Ox, Oy e Oz, respetivamente.
- $\overline{OF} = 2\sqrt{2}$;

1.1. Mostre que $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GO}$.

1.2. Determine as coordenadas:

1.2.1. do ponto médio de $[AF]$;

1.2.2. do vetor $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OG}$;

1.2.3. do ponto $G + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$;

1.2.4. do vetor $\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$.

1.3. Seja ε a superfície esférica de centro no ponto A e que passa pelo centro do cubo.

1.3.1. Determine a equação reduzida da superfície esférica ε.

1.3.2. Defina por uma condição a interseção da superfície esférica ε com o plano mediador de $[AO]$.

2. Considere, fixado um referencial ortonormado do espaço, a superfície esférica de centro C e definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z - 23 = 0$.

2.1. Indique as coordenadas do centro C e o raio da superfície esférica.

2.2. Seja A o ponto de intersecção da superfície esférica com a reta definida pela condição $x = 5 \wedge y = 4$, que tem cota negativa.
Determine uma equação do plano mediador de $[AC]$.
Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$ com $a,\ b,\ c$ e $d \in \mathbb{R}$

3. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado de origem O, os vetores $\vec{u}\left(m, 0, -\frac{3}{2}\right)$ e $\vec{v}(6, 0, m-6)$, onde m é um número real.

Sabe-se que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

Qual dos seguintes é o valor de m?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** 3 **(C)** -3 **(D)** $-\frac{1}{3}$

4. Considere, fixado um referencial ortonormado do espaço, os pontos $A(5,2,0)$ e $B(5,2,6)$ e a esfera E de centro A e tangente ao plano yOz.

4.1. Determine a inequação reduzida da esfera E.

4.2. Seja α o plano mediador de $[AB]$.

4.2.1. Determine uma equação do plano α.
Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$ com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$.

4.2.2. A interseção do plano α com a esfera E é:

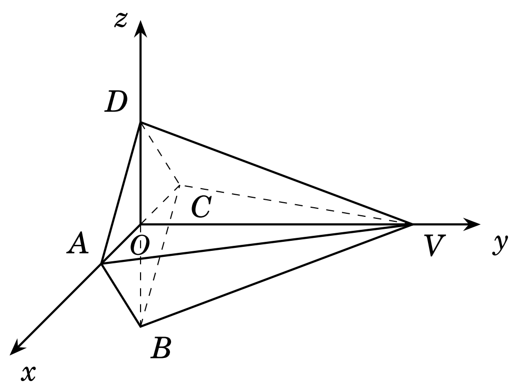
(A) um círculo de área 4π

(B) um círculo de área 8π

(C) um círculo de área 16π

(D) um círculo de área 32π

5. Na figura está representada a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.



Sabe-se, fixado, um referencial ortonormado do espaço que:

- O ponto O coincide com a origem do referencial e os vértices A, V e D pertencem aos eixos Ox, Oy e Oz, respetivamente.
- O base da pirâmide tem lado 2
- O centro da base da pirâmide coincide com a origem do referencial
- $\overline{DV} = \sqrt{38}$

5.1. Determine as coordenadas dos vértices da pirâmide.

5.2. Determine a inequação reduzida da esfera de centro no ponto V e tangente à base da pirâmide.

5.3. Seja P um ponto tal que $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OV}$, com $k \in \mathbb{R}^-$.
Determine as coordenadas do ponto P sabendo que a área do triângulo $[DPV]$ é igual a $\sqrt{32}$.

FIM

Soluções

1.

1.2.

1.2.1. $(1,1,1)$

1.2.2. $(-2,2,2)$

1.2.3. $(0,1,1)$

1.2.4. $(2,1,-2)$

1.3.

1.3.1. $(x-2)^2+y^2+z^2=3$

1.3.2. $y^2+z^2=2 \wedge x=1$

2.

2.1. $C(3,0,-2)$ e $r=6$.

2.2. $x+2y-2z-16=0$

3. **(B)**

4.

4.1. $(x-5)^2+(y-2)^2+z^2 \leq 25$

4.2. **(C)**

5.

5.1. $A(\sqrt{2},0,0)$
$B(0,0,-\sqrt{2})$
$C(-\sqrt{2},0,0)$
$D(0,0,\sqrt{2})$
$V(0,6,0)$

5.2. $x^2+(y-6)^2+z^2 \leq 36$

5.3. $P(0,-2,0)$