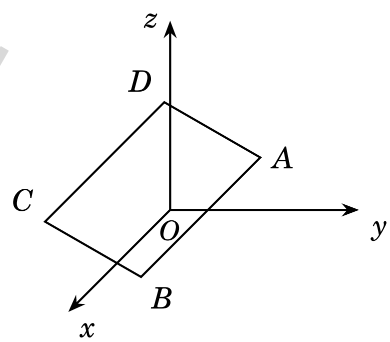
PLANO α

12º ANO | TESTE 2 | 2022

António Leite

1. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelogramo $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-1,2,1)$
- o ponto B tem coordenadas $(2,0,-1)$
- o ponto D tem coordenadas $(3,1,4)$

1.1. Determine a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D.

1.2. Determine uma equação do plano perpendicular à reta AB e que passa no ponto C.
Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$.

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $1-P(\overline{A})+P(\overline{A \cap \overline{B}})=\dfrac{11}{10}$

Qual é o valor de $P(A \cup \overline{B})+P(B)$?

(A) $\dfrac{1}{10}$ **(B)** $\dfrac{3}{10}$ **(C)** $\dfrac{7}{10}$ **(D)** $\dfrac{11}{10}$

3. Considere, num plano α, duas retas estritamente paralelas r e s.

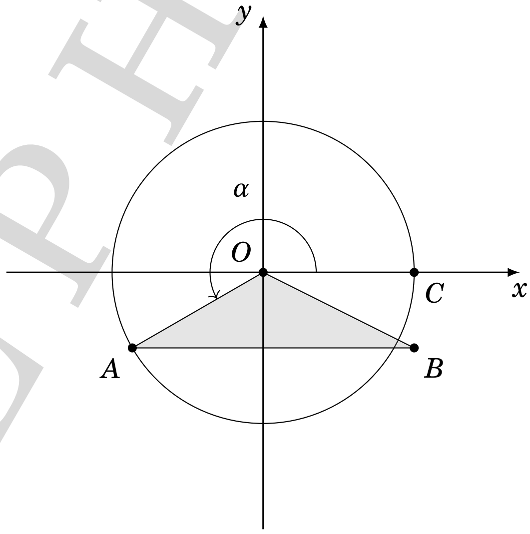
Assinalam-se, na reta r, n pontos distintos e na reta s, trinta pontos, igualmente distintos.

Escreva uma expressão que dê o número de retas que é possível definir com os pontos assinalados nas duas retas.

4. De uma progressão geométrica (d_n) sabe-se que o quarto termo é o óctuplo do sétimo termo e que a razão é igual a 32 vezes o nono termo.

Determine a soma dos cinco primeiros termos desta progressão.

5. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e o triângulo $[ABO]$.



Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox;
- o segmento de reta $[BC]$ é paralelo ao eixo Oy;
- o ponto C tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto A pertence ao terceiro quadrante e à circunferência.

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$ $\left(\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\right)$.

5.1. Mostre que a área do triângulo $[ABO]$, é dada em função de α, pela expressão:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{2}$$

5.2. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, os valores de α para os quais a medida da área do triângulo $[ABO]$ é superior a 0.6.

Na tua resposta:

- apresente uma condição que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permita(m) resolver a condição e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas;
- apresente o conjunto solução da condição na forma de intervalo de números reais, com os extremos arredondados às centésimas.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. Seja f a função, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por:

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \cos(x)$$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

7. Considere $\alpha \in]-\pi, 0[\ \wedge \ \sin\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$.

Determine o valor exato de $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

8. Seja h a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, definida por $h(x) = \sin^2 x - x\cos(x)$.

Mostre, recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função h tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{3}$.

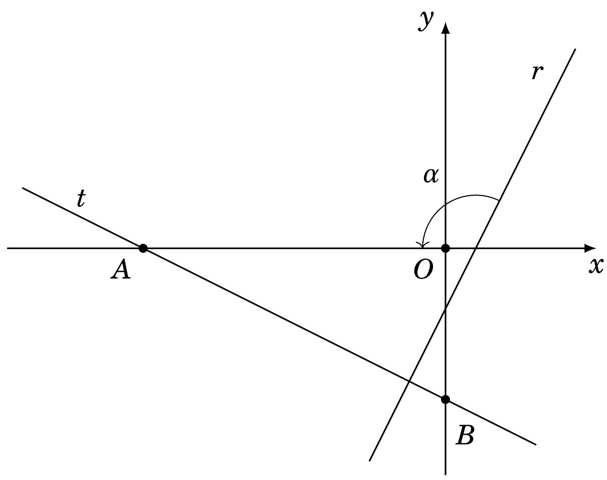
9. Seja j a função, de domínio $]0, 2\pi[$, definida por $j(x) = \dfrac{-\sin x}{1 - \cos x}$.

Estude a função j quanto à existência de assíntotas do seu gráfico e determine, caso exista(m), a(s) equação(ões) dessa(s) assíntota(s).

10. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy, as retas r e t.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-4, 0)$
- o ponto B tem coordenadas $(0, -2)$
- a reta t passa pelos pontos A e B
- as retas t e r são perpendiculares
- α é a amplitude do ângulo assinalado na figura



Determine o valor exato de $\cos(-\alpha) - \sin(\pi + \alpha)$.

Apresente o resultado na forma $a\sqrt{b}$, com $a \in \mathbb{R}$ e b o menor número primo possível.

FIM