PLANO α

12º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 2 | 2022

António Leite

1.

1.1. Como a superfície esférica tem centro no ponto B e passa no ponto D, o comprimento do raio é:

$$r = \overline{BD} = \sqrt{(3-2)^2 + (1-0)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27}$$

Como as coordenadas do centro são $(2,0,-1)$, tem-se que $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 27$ é a equação reduzida da superfície esférica pedida.

1.2. Seja α o plano pedido.

A reta AB é perpendicular ao plano α, pelo que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor normal ao plano α.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,0,-1) - (-1,2,1) = (3,-2,-2)$$

Logo, a equação do plano α é da forma: $3x - 2y - 2z + d = 0$.

E, como o ponto C pertence ao plano α, vamos determinar as suas coordenadas.

Ora, $[ABCD]$ é um paralelogramo, pelo que as retas AB e CD são paralelas, assim como as retas AD e BC, então,

$$C = D + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow C = (3,1,4) + (3,-2,-2) \Leftrightarrow C = (6,-1,2)$$

Vamos, agora, determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas do ponto C, na equação do plano α:

$$3(6) - 2(-1) - 2(2) + d = 0 \Leftrightarrow 18 + 2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -16$$

Portanto, o plano α pode ser definido pela equação $3x - 2y - 2z - 16 = 0$.

2. Ora, temos que:

$$
\begin{aligned}
& 1-P(\overline{A})+P(\overline{A\cap\overline{B}}) \\
=\ & P(A)+P(\overline{A}\cup B) \\
=\ & P(A)+P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B) \\
=\ & P(A)+1-P(A)+P(B)-P(\overline{A}\cap B) \\
=\ & P(B)+1-P(\overline{A}\cap B) \\
=\ & P(B)+P(\overline{\overline{A}\cap B}) \\
=\ & P(A\cup\overline{B})+P(B)
\end{aligned}
$$

Portanto, se $1-P(\overline{A})+P(\overline{A\cap\overline{B}})=\frac{11}{10}$ e $1-P(\overline{A})+P(\overline{A\cap\overline{B}})=P(A\cup\overline{B})+P(B)$,

então, $P(A\cup\overline{B})+P(B)=\frac{11}{10}$.

Resposta: **(D)**

3.
- Número de retas que se podem definir com um ponto da reta r e com um ponto da reta s:

$$^{n}C_1\times{}^{30}C_1=30n$$

- Número de retas que se podem definir com dois pontos da reta r: 1 (é sempre definida a própria reta r).
- Número de retas que se podem definir com dois pontos da reta t: 1 (é sempre definida a própria reta t).

Assim, uma expressão que dá o número de retas que é possível definir com os pontos assinalados nas duas retas é $30n+2$.

Resposta: $30n+2$.

4. Tem-se que: $d_4=8d_7$ e $r=32d_9$, sendo r a razão.

Ora,

$$d_4=8d_7\Leftrightarrow d_4=8(d_4\times r^3)\Leftrightarrow 1=8r^3\Leftrightarrow r^3=\frac{1}{8}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\Leftrightarrow r=\frac{1}{2}$$

Logo, $r=32d_9\Leftrightarrow\frac{1}{2}=32d_9\Leftrightarrow d_9=\frac{1}{64}$.

Daqui resulta que

$$d_9=d_1\times r^8\Leftrightarrow\frac{1}{64}=d_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^8\Leftrightarrow d_1=\frac{\frac{1}{64}}{\left(\frac{1}{2}\right)^8}=4$$

Portanto, a soma S, dos cinco primeiros termos desta progressão é dada por:

$$
\begin{aligned}
& S = d_1 \times \frac{1-r^5}{1-r} \\
\Leftrightarrow\ & S = 4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \\
\Leftrightarrow\ & S = \frac{31}{4}
\end{aligned}
$$

Resposta: $\frac{31}{4}$

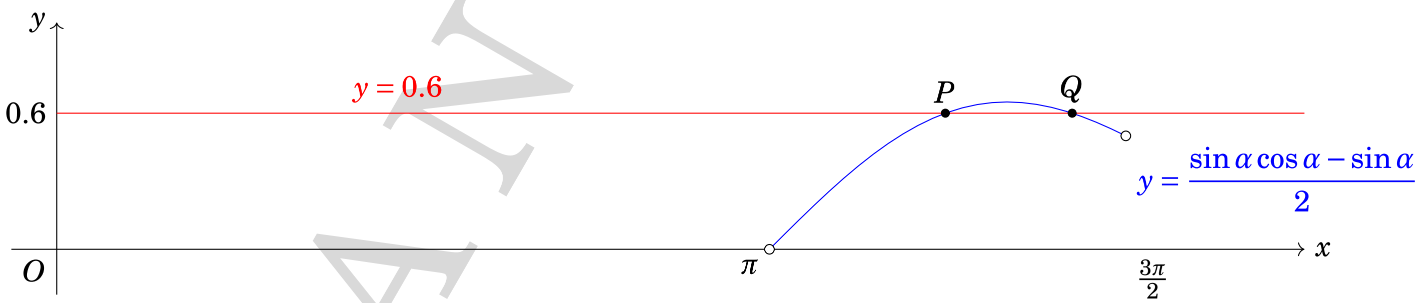
5.

5.1. O ponto A tem coordenadas $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.
O ponto B tem coordenadas $(1, \sin\alpha)$, pois $[BC]$ é paralelo ao eixo Oy.
Então, $\overline{AB} = -x_A + x_B = -\cos\alpha + 1$ e altura, h, do triângulo $[ABO]$ é $-y_A = -\sin\alpha$.
Assim, tem-se que:

$$\text{Área}_{\Delta[ABO]} = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{(-\cos\alpha + 1)(-\sin\alpha)}{2} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{2} \text{ (c.q.m)}$$

5.2. O problema pode ser traduzido pela condição:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{2} > 0.6 \wedge \alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$$



Logo, $P(3{,}917; 1{,}200)$ e $Q(4{,}476; 1{,}200)$.
Resposta: $\alpha \in]3{,}92; 4{,}48[$.

6. $f'(x) = \left(\dfrac{x^2}{4} - \cos x\right)' = \left(\dfrac{x^2}{4}\right)' - (\cos x)' = \dfrac{x}{2} - (-\sin x) = \dfrac{x}{2} + \sin x$

$f''(x) = \left(\dfrac{x}{2} + \sin x\right)' = \left(\dfrac{x}{2}\right)' + (\sin x)' = \dfrac{1}{2} + \cos x$

Determinemos os zeros de f'':

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in]-\pi, \pi[$, tem-se que:

Se $k = 0$: $x = \dfrac{2\pi}{3} \vee x = -\dfrac{2\pi}{3}$

Se $k = 1$: $x = \dfrac{8\pi}{3} \vee x = \dfrac{4\pi}{3}$

Se $k = -1$: $x = -\dfrac{4\pi}{3} \vee x = -\dfrac{8\pi}{3}$

Portanto, os zeros de f'' são $-\dfrac{2\pi}{3}$ e $\dfrac{2\pi}{3}$.

x	$-\pi$		$-\dfrac{2\pi}{3}$		$\dfrac{2\pi}{3}$		π
sinal de f''		-	0	+	0	-	
Sentido da concavidade do gráfico de f		$\cap$	**P.I**	$\cup$	**P.I**	$\cap$	

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right[$ e concavidade voltada para cima em $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

$f\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)^2}{4} - \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\dfrac{4\pi^2}{9}}{4} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{9} + \dfrac{1}{2}$

$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)^2}{4} - \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\dfrac{4\pi^2}{9}}{4} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{9} + \dfrac{1}{2}$

O gráfico de f tem dois pontos de inflexão de coordenadas $\left(-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi^2}{9} + \dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi^2}{9} + \dfrac{1}{2}\right)$.

7. Temos que $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sin\left(-\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$.

E, como $\alpha \in]-\pi, 0[$ e $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$, então, $\alpha \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$, isto é, α pertence ao terceiro quadrante.

Por outro lado,

$$\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2\alpha) =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Recorrendo à fórmula fundamental da Trigonometria, temos que:

$$\sin^2\alpha+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=1-\frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin\alpha=-\frac{4}{5} \vee \sin\alpha=\frac{4}{5}$$

Como $\alpha \in 3^{\text{o}}$ Quadrante, $\sin\alpha<0$, pelo que $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

Assim, vem que:

$$\begin{aligned}
&2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(-\frac{4}{5}\right)^2\right)\\
=&\frac{24\sqrt{2}}{50}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{9}{25}-\frac{16}{25}\right)\\
=&\frac{24\sqrt{2}}{50}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{7}{25}\right)\\
=&\frac{24\sqrt{2}}{50}+\frac{7\sqrt{2}}{50}\\
=&\frac{31\sqrt{2}}{50}
\end{aligned}$$

Resposta: $\frac{31\sqrt{2}}{50}$

8. Pretende-se mostrar que $\exists c \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[: h'(c)=-\frac{1}{3}$.

Determinemos uma expressão analítica de h', primeira derivada de h.

$$\begin{aligned}
h'(x)=&(\sin^2 x - x\cos x)'\\
=&2\sin x(\sin x)'-[(x')\cos x + x(-\sin x)]\\
=&2\sin x\cos x-\cos x + x\sin x\\
=&\sin(2x)-\cos x + x\sin x
\end{aligned}$$

A função h' é contínua em $\mathbb{R}$, pois resulta de operações sucessivas entre funções contínuas em $\mathbb{R}$.

Como $\left[-\frac{\pi}{2},0\right] \subset \mathbb{R}$, em particular, h' é contínua em $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

$h'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0-0-\frac{\pi}{2}(-1)=\frac{\pi}{2}$

$h'(0)=\sin(0)-\cos(0)+0\cdot\sin(0)=0-1+0=-1$

Assim, resulta que $h'(0)<-\frac{1}{3}<h'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Como h' é contínua no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ e $h'(0) < -\frac{1}{3} < h'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, podemos garantir, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{3}$.

9. A função j tem domínio $]0,2\pi[$ e é contínua no seu domínio, pois resulta de operações sucessivas entre funções contínuas (quociente entre o produto de uma função constante por uma função trigonométrica e a diferença entre uma função constante e uma função trigonométrica), pelo que 0 e 2π são pontos de acumulação do domínio de j, portanto, as retas de equação $x=0$ e $x=2\pi$ são as únicas candidatas a assíntotas verticais do gráfico de j.

$$\lim_{x\to 0^+} j(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(1+\cos x)}{\sin x} = \frac{-(1+1)}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de j.

$$\lim_{x\to 2\pi^-} j(x) = \lim_{x\to 2\pi^-} \frac{-\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 2\pi^-} \frac{-\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 2\pi^-} \frac{-(1+\cos x)}{\sin x} = \frac{-(1+1)}{0^-} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x=2\pi$ é assíntota vertical ao gráfico de j.

Por outro lado, como o domínio é um conjunto limitado, o gráfico de j não tem assíntotas não verticais.

10. Determinemos o declive da reta t. A reta t passa pelos pontos $A(-4,0)$ e $B(0,-2)$, logo

$$m_t = \frac{-2-0}{0-(-4)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

As retas t e r são perpendiculares, pelo que $m_r = 2$.

Seja β a inclinação da reta r, então $\tan\beta = 2$.

Como α e β são suplementares, resulta que $\alpha+\beta=\pi \Leftrightarrow \beta = \pi-\alpha$, portanto, tem-se que

$$\tan\beta = 2 \Leftrightarrow \tan(\pi-\alpha) = 2 \Leftrightarrow -\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \tan\alpha = -2$$

Por outro lado, temos que: $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, assim vem que:

$$1+(-2)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \vee \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Como α é obtuso, temos que $\cos\alpha < 0$, pelo que $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Tem-se, ainda que, $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, logo:

$$\sin \alpha = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Assim, vem que

$$\cos(-\alpha) - \sin(\pi + \alpha) = \cos \alpha - (-\sin \alpha) = \cos \alpha + \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

FIM