10º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 2 | 2022

António Leite

1. A circunferência tem centro no ponto de coordenadas $(-3,4)$.

Os vetores com a direção do vetor $\vec{u}$ são do tipo $k(2,-6)$, com $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ora, se $k = -\frac{1}{2}$, temos: $-\frac{1}{2}(2,-6) = (-1,3)$.

Portanto, uma equação vetorial da reta que passa pelo centro desta circunferência e tem a direção do vetor $\vec{u}$ é:

$$(x,y) = (-3,4) + k(-1,3),\ k \in \mathbb{R}$$

Resposta: **(D)**

2. Temos que, $r: 2y = -8ax + 3 \Leftrightarrow y = -4ax + \frac{3}{2}$, pelo que o declive da reta r é $-4a$.

Por outro lado, as coordenadas de um vetor diretor da reta t são $(2,1)$, daqui resulta que o declive desta reta é $\frac{1}{2}$.

Retas paralelas têm o mesmo declive, logo $-4a = \frac{1}{2}$, ou seja, $a = -\frac{1}{8}$.

Resposta: **(A)**

3. Uma reta paralela ao eixo Oz pode ser definida por uma condição do tipo $x = a \wedge y = b$, com a e b números reais.

Ora, a reta passa pelo ponto P de coordenadas $(2,-5,4)$, portanto, pode ser definida pela condição $x = 2 \wedge y = -5$.

Resposta: **(A)**

4.

4.1. Determinemos as coordenadas do ponto B.

$\overrightarrow{CB} = B - C \Leftrightarrow B = C + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow B = (1,6,-5) + (-3,-2,1) \Leftrightarrow B = (-2,4,-4)$

A reta é paralela ao eixo Ox, pelo que os vetores diretores desta são do tipo $(a,0,0)$, com $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

No caso de $a = 1$, temos que uma equação vetorial da reta que passa pelo ponto B e é paralela ao eixo Ox é:

$$(x,y,z) = (-2,4,-4) + k(1,0,0),\ k \in \mathbb{R}$$

4.2. Seja $P(x,y,z)$ um ponto genérico do plano β.

$$
\begin{aligned}
& d(A,P) = d(C,P) \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2+(z+5)^2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2+(z+5)^2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2-8z+16 = x^2-2x+1+y^2-12y+36+z^2+10z+25 \\
\Leftrightarrow\ & -4x+2y-8z+21 = -2x-12y+10z+62 \\
\Leftrightarrow\ & 2x-14y+18z+41 = 0
\end{aligned}
$$

Assim, o plano β pode ser definido pela equação $2x-14y+18z+41=0$.

5.

5.1. A esfera E, de diâmetro $[RT]$, tem centro no ponto médio de $[RT]$, seja M esse ponto.

$$M\left(\frac{-4+2}{2},\ \frac{1-5}{2},\ \frac{2+6}{2}\right) \Leftrightarrow M(-1,-2,4)$$

O raio desta esfera é igual a $d(M,R)$, por exemplo.

$$d(M,R) = \sqrt{(-4+1)^2+(1+2)^2+(2-4)^2} = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}$$

A inequação reduzida da esfera E é: $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 \leq 22$.

5.2. A interseção da esfera E com o plano de equação $x=1$ pode ser definida pela condição $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 \leq 22 \wedge x=1$.

Temos então que:

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 \leq 22 \\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1+1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 \leq 22 \\ x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(y+2)^2+(z-4)^2 \leq 18 \\ x=1\end{cases}$$

Resulta, assim, que a interseção pedida é o círculo de centro no ponto de coordenadas $(1,-2,4)$ e raio $\sqrt{18}$, contido no plano de equação $x=1$.
Sendo a área do círculo igual a πr^2, temos que a área deste círculo é $\pi(\sqrt{18})^2 = 18\pi$.
Resposta: **(B)**

6.

6.1. Determinemos o domínio da função g.

$$\begin{aligned}
D_g &= \{x \in \mathbb{R}:\ x^2-4x-5 \neq 0 \land 4-x \geq 0\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}:\ x \neq \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2-4(-5)}}{2} \land -x \geq -4\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}:\ x \neq \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \land x \leq 4\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}:\ \left(x \neq \frac{4-6}{2} \land x \neq \frac{4+6}{2}\right) \land x \leq 4\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}:\ (x \neq -1 \land x \neq 5) \land x \leq 4\right\} \\
&=]-\infty, 4] \setminus \{-1\}
\end{aligned}$$

Caracterização de g

$$\begin{aligned}
g :]-\infty, 4] \setminus \{-1\} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-4x-5}
\end{aligned}$$

6.2. Ora, $D_f = \{x \in \mathbb{R}:\ x^2+25 \neq 0\}$.
A condição $x^2+25 \neq 0$ é universal em $\mathbb{R}$, pelo que $D_f = \mathbb{R}$.
Resposta: **(A)**

7.

7.1. As retas AE e BH são paralelas, pelo que os seus vetores diretores são colineares.
$\overrightarrow{BH} = H - B = (0,10,13)-(-3,8,-2) = (3,2,15)$.
Assim, as coordenadas de um vetor diretor da AE podem ser $(3,2,15)$ e como esta reta passa pelo ponto A, uma equação vetorial que a defina pode ser, por exemplo,

$$(x,y,z) = (1,2,-2) + k(3,2,15),\ k \in \mathbb{R}$$

7.2. Determinemos as coordenadas do ponto E.

$$E = A + \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow E = (1,2,-2)+(3,2,15) \Leftrightarrow E = (4,4,13)$$

Um vetor diretor da reta BE, pode ser $\overrightarrow{BE}$.

$$\overrightarrow{BE} = E - B = (4,4,13)-(-3,8,-2) = (7,-4,15)$$

Assim, a reta BE pode ser definida pela equação vetorial

$$(x,y,z) = (-3,8,-2) + \lambda(7,-4,15),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Já o plano xOz pode ser definido pela equação $y = 0$.
Determinemos, agora, as coordenadas do ponto Q:

$$\begin{cases} x = -3 + 7\lambda \\ y = 8 - 4\lambda \\ z = -2 + 15\lambda \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 7\lambda \\ 0 = 8 - 4\lambda \\ z = -2 + 15\lambda \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 7(2) \\ \lambda = 2 \\ z = -2 + 15(2) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ \lambda = 2 \\ z = 28 \\ y = 0 \end{cases}$$

Portanto, o ponto Q tem coordenadas $(11, 0, 28)$.

8.

8.1. $j\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$

$j(-1) = 2 - (-1) = 3$

$j\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$j(5) = 2 - 5 = -3$

Logo, o contradomínio de j é $\left\{-3, \frac{3}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}$.

8.2.
- Temos que $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
  Assim, $D'_h = \{-3, -\sqrt{5}, -1, 2\sqrt{5}\}$, logo **(A)** é verdadeira.

- $h(3) = -\sqrt{5}$, logo $\frac{1}{h(3)} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, então **(B)** é verdadeira.

- $h(-4) - h(3) = 2\sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 3\sqrt{5}$, pelo que **(C)** é falsa.

- $\frac{20}{h(-4)} = \frac{20}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} = h(-4)$, logo **(D)** é verdadeira.

Resposta: **(C)**

9.

9.1.

$$\begin{aligned} D_t &= \{x \in \mathbb{R} : 3 - x \geq 0 \wedge 2x + 8 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3 \wedge x > -4\} \\ &=]-4, 3] \end{aligned}$$

Ora, $]-4, 3] \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, pelo que são 7 os números inteiros que pertencem ao domínio da função t.
Resposta: **(B)**

9.2. A função i é injetiva se e somente se

$$\forall x_1, x_2 \in D_i,\ i(x_1) = i(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Tem-se que,

$$\begin{aligned} i(x_1) = i(x_2) &\Leftrightarrow\ -2x_1 + 5 = -2x_2 + 5 \\ &\Leftrightarrow\ -2x_1 = -2x_2 \\ &\Leftrightarrow\ x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Logo, a função i é injetiva (c.q.p)

9.3. $D_{t\circ i} = \{x \in \mathbb{R}:\ x \in D_i \wedge i(x) \in D_t\}$

$D_i = \mathbb{R}$

$D_t =]-4, 3]$

Assim,

$$\begin{aligned} D_{t\circ i} &= \{x \in \mathbb{R}:\ x \in \mathbb{R} \wedge -2x + 5 \in]-4,3]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}:\ x \in \mathbb{R} \wedge -4 < -2x + 5 \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}:\ x \in \mathbb{R} \wedge -9 < -2x \leq -2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}:\ x \in \mathbb{R} \wedge 2 \leq 2x < 9\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}:\ x \in \mathbb{R} \wedge 1 \leq x < \frac{9}{2}\right\} \\ &= \left[1, \frac{9}{2}\right[\end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned} (t \circ i)(x) &= t(i(x)) \\ &= t(-2x + 5) \\ &= \frac{\sqrt{3 - (-2x + 5)}}{\sqrt{2(-2x + 5) + 8}} \\ &= \frac{\sqrt{3 + 2x - 5}}{\sqrt{-4x + 10 + 8}} \\ &= \frac{\sqrt{2x - 2}}{\sqrt{-4x + 18}} \end{aligned}$$

A função $t \circ i$ pode ser caracterizada do modo que se segue:

$$\begin{aligned} (t \circ i): \left[1, \frac{9}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sqrt{2x - 2}}{\sqrt{-4x + 18}} \end{aligned}$$

10. Uma vez que a função p é bijetiva, admite inversa.

Determinemos, assim, uma expressão analítica da função p^{-1}, inversa de p.

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{2x+1} &\Leftrightarrow y(2x+1) = x \\ &\Leftrightarrow 2xy + y = x \\ &\Leftrightarrow 2xy - x = -y \\ &\Leftrightarrow x - 2xy = y \\ &\Leftrightarrow x(1-2y) = y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{1-2y} \end{aligned}$$

Assim, $p^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-2x}$.

$D_{p^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}:\ 1-2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Como $D'_p = D_{p^{-1}}$, então $D'_p = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

FIM