PLANO $\alpha$

# 12º ANO | FICHA 15 | 2022

António Leite

**1.** Considere:

**1.1.** $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ tal que $\sin(-\pi-\alpha)=\frac{1}{3}$.
Determine o valor exato de $\cos(-\alpha+\pi)-\tan(-\alpha)$.

**1.2.** $\alpha \in \left]-\pi, 0\right[$ tal que $\cos(\pi+\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Determine o valor exato de $\sqrt{14}\sin(-\alpha+\pi)-\sqrt{7}\tan(-\alpha-\pi)$.

**1.3.** $\alpha \in ]-2\pi,-\pi[$ tal que $5\sin\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=3$.

Determine o valor exato de $10\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)-3\tan(-5\pi-\alpha)$.

**2.** Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

**2.1.** $\cos^2 x+\cos x=0$

**2.2.** $2\cos^2 x-2=\sin x$

**2.3.** $\sqrt{3}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-\tan\left(\frac{x}{2}\right)=0$

**2.4.** $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x$

**3.** Considere as funções $f$, $g$ e $h$ definidas respetivamente por:

$$f(x)=-1+\sqrt{2}\sin(2x)$$
$$g(x)=-1-2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$$
$$h(x)=\tan^2\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}$$

**3.1.** Prove que $f$ é uma função periódica de período $\pi$ e que $g$ é uma função periódica de período $8\pi$.

**3.2.** Determine o domínio e o contradomínio da função $h$.

**3.3.** Determine uma expressão geral dos zeros da função $g$.

**3.4.** Resolva, no intervalo $]-\pi,\pi[$, a equação $f(x)=-2$.

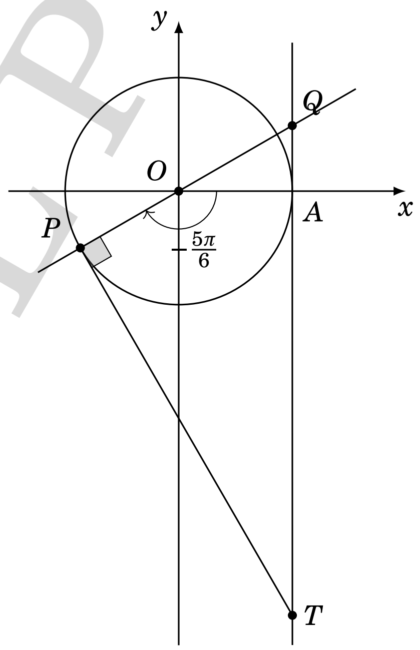
**4.** Considere as funções $f$ e $g$, ambas de domínio $[0, 2\pi[$, definidas por

$$f(x) = 2\sin^2 x - \sin x \text{ e } g(x) = 2\sin x - 1$$

Sejam, num referencial ortonormado do plano, $A$, $B$ e $C$ os pontos de interseção dos gráficos de $f$ e $g$, sendo $A$ o ponto de menor abcissa e $C$ o ponto de maior abcissa.

Determine o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

**5.** Na figura está representada, num referencial o.n. $xOy$, a circunferência trigonométrica e o triângulo $[PQT]$, retângulo em $P$.




Sabe-se que:

- o ponto $A$ tem coordenadas $(1, 0)$
- $A\hat{O}P = -\frac{5\pi}{6}$ rad
- os pontos $Q$ e $T$ têm abcissa 1
- $[QT]$ é perpendicular ao semieixo positivo $Ox$
- o ponto $P$ pertence à circunferência

**5.1.** Determine as coordenadas dos pontos $P$ e $Q$.

**5.2.** Determine a amplitude do ângulo $PQT$.
Apresente o valor pedido em radianos.

**5.3.** Determine o valor exato da área do triângulo $[PQT]$.

# FIM

**Soluções**

**1.**

**1.1.** $\frac{5\sqrt{2}}{12}$

**1.2.** $\frac{7}{2}$

**1.3.** 12

**2.**

**2.1.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**2.2.** $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = k\pi \vee x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**2.3.** $x = 2k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**2.4.** $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**3.**

**3.2.** $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$D'_h = [\sqrt{3}, +\infty[$

**3.3.** $x = -\dfrac{8\pi}{3} + 8k\pi \vee x = \dfrac{8\pi}{3} + 8k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**3.4.** $x = -\dfrac{3\pi}{8} \vee x = -\dfrac{\pi}{8} \vee x = \dfrac{5\pi}{8} \vee x = \dfrac{7\pi}{8}$

**4.** $\dfrac{\pi}{3}$

**5.**

**5.1.** $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $Q\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

**5.2.** $\frac{\pi}{3}$ rad

**5.3.** $\frac{12+7\sqrt{3}}{6}$