12º ANO | TESTE 1 | 2021

António Leite

1. Uma caixa tem quatro bolas numeradas com os algarismos 1, 2, 3 e 4.

   Vão ser retiradas, aleatoriamente, duas bolas da caixa, uma a seguir à outra, repondo a primeira antes de retirar a segunda.

   Qual é a probabilidade do maior número obtido, na extração das duas bolas, ser o 2?

   (A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{3}{16}$

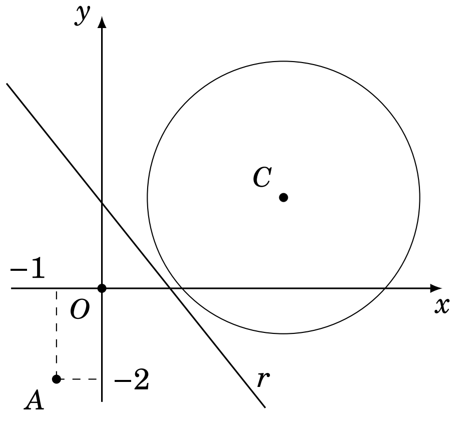
2. Considere todos os números que se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número 7551282.

   Quantos desses números são ímpares?

3. Na figura está representada a circunferência de centro C, o ponto A e a reta r.

   Sabe-se que:

   - o ponto A tem coordenadas $(-1,-2)$
   - a circunferência é definida pela equação $x^2+y^2-8x-4y+11=0$
   - a reta r é a mediatriz de $[AC]$



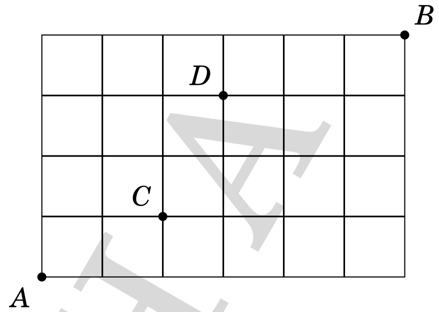
   Determine a equação reduzida da reta r.

4. Considere a seguinte expressão $A(x)=\left(x^3+\dfrac{1}{2x}\right)^{20}$, $x\neq 0$.

   Determine, relativamente ao desenvolvimento de $A(x)$ pelo Binómio de Newton, o termo independente de x.

   Apresente o termo pedido na forma de fração irredutível.

5. Considere, no esquema ao lado, todos os caminhos existentes, seguindo as linhas da quadrícula, que ligam o ponto A ao ponto B passando pelo ponto D e sem andar da direita para a esquerda nem de cima para baixo.



Qual a probabilidade de seguir um desses caminhos e não passar pelo ponto C?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. Seja (u_n) uma progressão aritmética.

Sabe-se que, relativamente a (u_n):

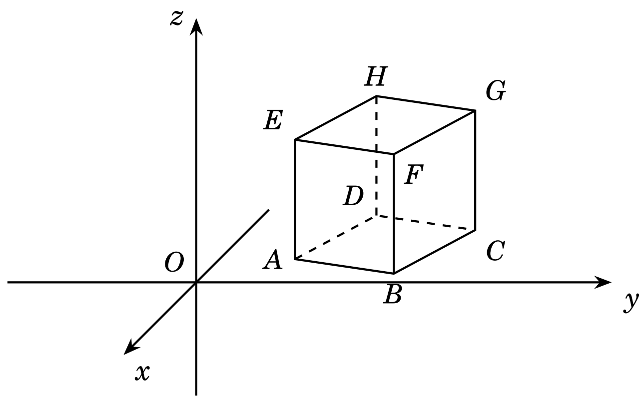
- a soma dos primeiros m termos é igual a m^2p e a soma dos n primeiros termos é igual a n^2p, com $p \in \mathbb{N}$, ou seja, $S_m = m^2p$ e $S_n = n^2p$.

Prove que se $S_m = m^2p$ e $S_n = n^2p$, $m \neq n$, então $S_p = p^3$.

7. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o ponto E tem coordenadas $\left(1, 3, 1+\sqrt{10}\right)$
- o vetor $\overrightarrow{CE}$ tem coordenadas $\left(2, -4, \sqrt{10}\right)$
- a aresta $[AE]$ é paralela ao eixo Oz



7.1. Determine uma equação do plano mediador do segmento de reta $[OC]$.
Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$.

7.2. Determine a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto G e que passa pelo ponto H.

7.3. Pretende-se numerar as seis faces do cubo $[ABCDEFGH]$ com os números inteiros de 1 a 6, com um número diferente em cada face.
Qual a probabilidade de faces opostas não ficarem numeradas com números primos?
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

8. Numa formação online participaram jovens de ambos os sexos e de várias nacionalidades.

Sabe-se que:

- um terço dos participantes eram mulheres;
- das mulheres, a quinta parte era europeia;
- dos homens, a quinta parte, também, era europeia.

Escolhido, ao acaso, um dos participantes desta formação verifica-se que este é europeu.

Qual é a probabilidade de ser um homem?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

9. Para um certo número real k, seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{2x-8} & \text{se } x \le 1 \\[2ex] \dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3} + k & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Sabe-se que f é contínua no ponto de abcissa 1.

9.1. Qual é o valor de k?

(A) $-\dfrac{1}{2}$ **(B)** $-\dfrac{5}{4}$ **(C)** $-\dfrac{1}{4}$ **(D)** $\dfrac{1}{2}$

9.2. O gráfico de f tem uma assíntota horizontal, quando $x \to -\infty$.
Determine a equação reduzida dessa assíntota.

10. Quantas soluções existem para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, sendo que cada x_i, com $i = 1,\ 2,\ 3$ é um número inteiro não negativo?

(A) 171 **(B)** 231 **(C)** 1140 **(D)** 1771

FIM