12º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 1 | 2021

António Leite

1. Podemos construir uma tabela de dupla entrada para apresentar todos os resultados desta experiência. Assim, vem que:

	1	2	3	4
1	1	**2**	3	4
2	**2**	**2**	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

Há 16 casos possíveis e em três destes o maior número obtido é o 2, pelo que, a probabilidade pedida é $\frac{3}{16}$.

Resposta: **(D)**

2. Para que os números resultantes da troca dos algarismos 7551282 sejam ímpares, o algarismo das unidades deve ser 1, 5 ou 7.

Assim, o número total resulta da soma das duas contagens seguintes:

- Números em que o algarismo das unidades é 1 ou 7:
  Para a última posição existem duas escolhas (1 ou 7) e, para cada uma destas, existem ${}^6C_2$ maneiras diferentes de posicionar os "5"e, para para cada uma destas, existem ${}^4C_2$ maneiras diferentes de posicionar os "2"e, para cada uma destas, existem 2! maneiras diferentes de posicionar os dois algarismos que sobram (o "8" e o número ímpar que não foi escolhido para a última posição). Resulta assim, que há $2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times 2!$ números nestas condições.
- Números em que o algarismo das unidades é o 5:
  Selecionando o algarismo 5 para a última posição, restam seis algarismos (1,2,2,5,7,8) para serem colocados. Escolhemos duas posições de entre as seis disponíveis, para posicionar os "2" , logo existem ${}^6C_2$ escolhas diferentes e, para cada uma destas, existem 4! maneiras diferentes de posicionar os restantes algarismos. Portanto, há ${}^6C_2 \times 4!$ números nestas condições.

Assim, podemos formar $2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times 2! + {}^6C_2 \times 4!$ números diferentes, de acordo com as condições do enunciado, ou seja, 720 números.

Resposta: 720

3. A circunferência é definida pela equação $x^2+y^2-8x-4y+11=0$.

Determinemos o seu centro:

$$\begin{aligned} & x^2-8x+y^2-4y=-11 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-8x+16+y^2-4y+4=-11+16+4 \\ \Leftrightarrow\ & (x-4)^2+(y-2)^2=9 \end{aligned}$$

Portanto, $C(4,2)$.

Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da reta r.

A mediatriz de $[AC]$ pode ser definida pela equação $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, sendo M o ponto médio de $[AC]$.

Determinemos as coordenadas do ponto M.

$$M\left(\frac{-1+4}{2},\frac{-2+2}{2}\right)\Leftrightarrow M\left(\frac{3}{2},0\right)$$

Assim, temos que:

$$\overrightarrow{MP}=P-M=(x,y)-\left(\frac{3}{2},0\right)=\left(x-\frac{3}{2},y\right)$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(4,2)-(-1,-2)=(5,4)$$

Então,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow\ & \left(x-\frac{3}{2},y\right)\cdot(5,4)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 5x-\frac{15}{2}+4y=0 \\ \Leftrightarrow\ & 4y=-5x+\frac{15}{2} \\ \Leftrightarrow\ & y=-\frac{5}{4}x+\frac{15}{8} \end{aligned}$$

A equação reduzida da reta r é então $y=-\frac{5}{4}x+\frac{15}{8}$.

4. Pela fórmula do binómio de Newton, sabemos que todos os termos do desenvolvimento de $\left(x^3+\frac{1}{2x}\right)^{20}$, $x\neq 0$ são da forma:

$$^{20}C_k\ \left(x^3\right)^{20-k}\left(\frac{1}{2x}\right)^k,\ k\in\mathbb{Z}\wedge 0\leq k\leq 20$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} & ^{20}C_k\ x^{60-3k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{x}\right)^k \\ =\ & ^{20}C_k\ \left(\frac{1}{2}\right)^k x^{60-3k}x^{-k} \\ =\ & ^{20}C_k\ \left(\frac{1}{2}\right)^k x^{60-4k} \end{aligned}$$

Portanto, o termo que não depende da variável x é tal que $60-4k=0$.

Assim, $60-4k=0 \Leftrightarrow k=15$.

Logo, o termo independente é: ${}^{20}C_{15}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \frac{969}{2048}$.

5. O número de caminhos diferentes, nas condições do enunciado, que ligam o ponto A ao ponto B passando pelo ponto D é dado por ${}^{6}C_3 \times {}^{4}C_3$, ou seja, 80.

Por outro lado, o número de caminhos diferentes, ainda nas condições do enunciado, que ligam o ponto A ao ponto B, passando, simultaneamente, pelos pontos C e D, é dado por ${}^{3}C_2 \times {}^{3}C_1 \times {}^{4}C_3$, ou seja, 36. Assim, o número de caminhos diferentes que ligam o ponto A ao ponto B passando pelo ponto D, mas não pelo ponto C é dado pela diferença entre 80 e 36, ou seja 44.

Portanto, a probabilidade pedida é igual a $\frac{44}{80} = \frac{11}{20}$.

Resposta: $\frac{11}{20}$

6. Sejam u_1 e r o primeiro termo e a razão desta progressão aritmética.

Temos, então, que:

$$\begin{aligned} S_m = \frac{u_1+u_m}{2} \times m \Leftrightarrow\ & \frac{u_1+(u_1+(m-1)r)}{2} \times m = m^2 p \\ \Leftrightarrow\ & 2u_1+(m-1)r = m^2 p \times \frac{2}{m} \ \ (m \neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & 2u_1+(m-1)r = 2mp \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} S_n = \frac{u_1+u_n}{2} \times n \Leftrightarrow\ & \frac{u_1+(u_1+(n-1)r)}{2} \times n = n^2 p \\ \Leftrightarrow\ & 2u_1+(n-1)r = n^2 p \times \frac{2}{n} \ \ (n \neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & 2u_1+(n-1)r = 2np \end{aligned}$$

Consideremos o sistema formado por estas duas equações:

$$\begin{cases} 2u_1+(m-1)r = 2mp \\ 2u_1+(n-1)r = 2np \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2np-(n-1)r+(m-1)r = 2mp \\ 2u_1+ = 2np-(n-1)r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2np-nr+r+mr-r = 2mp \\ 2u_1 = 2np-(n-1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mr-nr = 2mp-2np \\ 2u_1 = 2np-(n-1)r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r(m-n) = 2p(m-n) \\ 2u_1 = 2np-(n-1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2p, \text{ pois } m \neq n \\ 2u_1 = 2np-(n-1)2p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2p \\ 2u_1 = 2np - 2np + 2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2p \\ 2u_1 = 2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2p \\ u_1 = p \end{cases}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} S_p = \frac{u_1 + u_p}{2} \times p \Leftrightarrow\ & S_p = \frac{u_1 + (u_1 + (p-1)r)}{2} \times p \\ \Leftrightarrow\ & S_p = \frac{p + (p + (p-1)2p)}{2} \times p \\ \Leftrightarrow\ & S_p = \frac{p + p + 2p^2 - 2p}{2} \times p \\ \Leftrightarrow\ & S_p = p^2 \times p \Leftrightarrow S_p = p^3 \quad \text{(c.q.p)} \end{aligned}$$

7.

7.1. Determinemos as coordenadas do ponto C.
Ora, $\overrightarrow{CE} = E - C$, ou seja,
$\left(2, -4, \sqrt{10}\right) = \left(1, 3, 1 + \sqrt{10}\right) - C \Leftrightarrow C = \left(1, 3, 1 + \sqrt{10}\right) - \left(2, -4, \sqrt{10}\right) \Leftrightarrow C = (-1, 7, 1)$
Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico do plano mediador de $[OC]$, assim vem que:

$$\begin{aligned} & d(O,P) = d(C,P) \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2 + (z-1)^2} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 + z^2 = (x+1)^2 + (y-7)^2 + (z-1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 + z^2 - 2z + 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 14y - 2z + 51 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a equação pedida é, por exemplo, $2x - 14y - 2z + 51 = 0$.

7.2. Determinemos as coordenadas do ponto G.
Ora, $G = C + \overrightarrow{AE}$, ou seja, $G = (-1, 7, 1) + \overrightarrow{AE}$.
Como $[AE]$ // Oz, então vem que $x_A = x_E \wedge y_A = y_E$ e $z_A = z_C$, ou seja, $A(1, 3, 1)$.
Assim, $\overrightarrow{AE} = E - A = \left(1, 3, 1 + \sqrt{10}\right) - (1, 3, 1) = \left(0, 0, \sqrt{10}\right)$, logo
$G = (-1, 7, 1) + \left(0, 0, \sqrt{10}\right) = \left(-1, 7, 1 + \sqrt{10}\right)$.
A superfície esférica passa pelo ponto H e tem centro no ponto G, logo o raio é igual à medida do comprimento da aresta do cubo. Assim, raio=$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{10}$.
A equação pedida é $(x+1)^2 + (y-7)^2 + \left(z - 1 - \sqrt{10}\right)^2 = 10$.

7.3. Os números primos de 1 a 6 são: 2, 3 e 5.
O número de maneiras diferentes de posicionar os números primos é $6 \times 4 \times 2$ (já que têm de ficar em faces não opostas), restam 3 números não primos que podem ser posicionados nas 3 faces restantes (3!) resultando em $6 \times 4 \times 2 \times 3!$ casos favoráveis.
O número de casos possíveis é o número de permutações de 6 elementos, ou seja, $6! = 720$.

Assim, calculando a probabilidade com recurso à regra de Laplace e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos que a probabilidade pedida é

$$\frac{288}{720}=\frac{2}{5}$$

8. Sejam os acontecimentos A e B tais que:

A:"O participante escolhido é europeu"

B:"O participante escolhido é mulher"

Temos que: $P(B)=\frac{1}{3}$; $P(A|B)=\frac{1}{5}$ e $P(A|\overline{B})=\frac{1}{5}$.

Pretende-se determinar $P(\overline{B}|A)$.

Assim, $P(A|B)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{5}P(B)$.

Como $P(B)=\frac{1}{3}$, vem que, $P(A\cap B)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$, ou seja, $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$.

Por outro lado, $P(A|\overline{B})=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{5}P(\overline{B})$.

Como $P(\overline{B})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, vem que $P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}$, ou seja, $P(A\cap\overline{B})=\frac{2}{15}$.

Logo, $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

Daqui resulta que $P(\overline{B}|A)=\frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{3}$.

Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{2}{3}$.

9.

9.1. A função f é contínua em $x=1$, pelo que

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-}=f(1)=\frac{\sqrt{4(1)^2+5}}{2(1)-8}=-\frac{1}{2}$, calculando $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, temos que:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}+k\right)=\left(\frac{0}{0}\right)\text{ indeterminação}$$

Recorrendo à regra de Ruffini resulta que:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}+k\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)}+k\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+x+1}{x+3}+k\right)=\frac{3}{4}+k$$

Assim, como $f(1) = -\frac{1}{2}$ e f é contínua, temos que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \frac{3}{4} + k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{4}$$

Resposta: **(B)**

9.2. Temos que:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5}}{2x-8} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{2x-8}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{2x-8} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x\left(2-\frac{8}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{2-\frac{8}{x}} = \frac{-\sqrt{4+0}}{2-0} = -1$$

Como $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$, a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x \to -\infty$.

10. Considere o número 20 como sendo 20 símbolos __ , ou seja, 20 "traços"a serem distribuídos entre as três variáveis que neste caso funcionam como três categorias. Assim, estamos perante um problema de combinações com repetição, onde $n = 3$ e $r = 20$. Repare que pode existir uma categoria sem nenhum "traço", o que satisfaz as condições do enunciado do problema já que x_i deve ser um número inteiro não negativo.

Portanto, ${}^{n+r-1}C_r = {}^{22}C_{20} = 231$.

Resposta: **(B)**

FIM