11º ANO | TESTE 1 | 2021

António Leite

1. Sejam a e b dois números reais pertencentes ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Sabe-se que $\tan(30°)\left(\sqrt{\sin(a)}+\sqrt{\cos(b)}\right)=\sqrt{\sin(a)}-\sqrt{\cos(b)}$.

Qual é o valor exato de $\dfrac{\sin(a)-\cos(b)}{\left(\sqrt{\sin(a)}+\sqrt{\cos(b)}\right)^2}$?

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $\sqrt{3}$ **(D)** $3\sqrt{3}$

2. Sabe-se que $\dfrac{3}{\sin(-\pi+\alpha)}=12 \wedge \alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Determine o valor exato de $8\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)-15\tan(-5\pi-\alpha)$.

Apresente o resultado na forma $a\sqrt{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$.

3. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $1+\sqrt{2}\sin(6x)=0$.

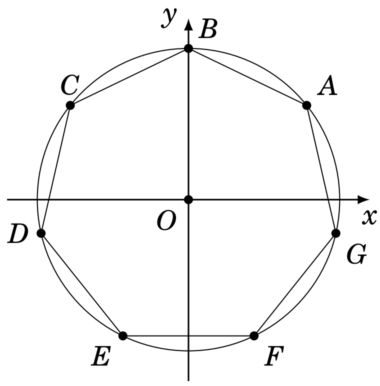
4. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e o heptágono regular $[ABCDEFG]$ inscrito na circunferência.

Sabe-se que o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy.

4.1. Sendo $\dot{O}C$ o lado origem, qual é o lado extremidade do ângulo generalizado definido por $\left(-\dfrac{48\pi}{7}\text{rad}, -3\right)$?

(A) $\dot{O}D$ **(C)** $\dot{O}F$

(B) $\dot{O}E$ **(D)** $\dot{O}G$



4.2. Calcule a área do triângulo $[ABO]$.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondada às centésimas.

5. Considere a seguinte igualdade:

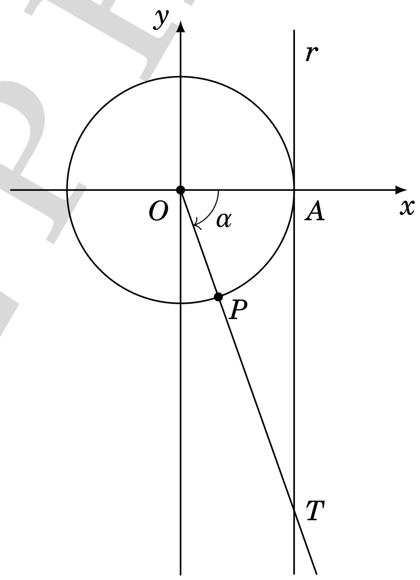
$$2\sin\left(-\frac{7\pi}{2}+\beta\right)-\cos(-101\pi+\beta)+2\cos(-\beta)=\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)-4\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)$$

Prove que $\cos(\beta)=\dfrac{1}{5}$.

6. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- a reta r é tangente à circunferência no ponto $A(1,0)$
- o ponto P, situado no quarto quadrante, pertence à circunferência
- a semireta $\dot{O}P$ interseta a reta r no ponto T
- α é a amplitude, em graus, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$
- o ponto T tem ordenada $-2\sqrt{2}$



6.1. Determine as coordenadas do ponto P.

6.2. Calcule o valor da área do setor circular AOP.
Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arrendodamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=-2-4\cos\left(3-\dfrac{x}{5}\right)$.

7.1. Qual dos seguintes valores é o período positivo mínimo da função f?

(A) 15π **(B)** 10π **(C)** 5π **(D)** 2π

7.2. Seja x_1 o maior zero negativo de f.
Determine o valor exato de x_1.

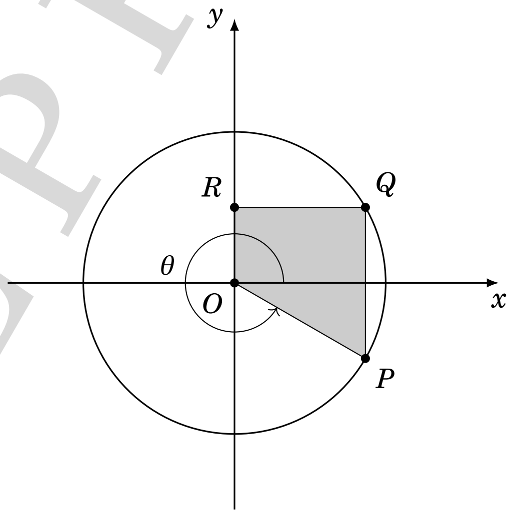
8. Sejam f e g duas funções, ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ e $g(x) = \cos x$.

Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos das duas funções, quando representadas no mesmo referencial o.n. xOy, no intervalo $]0, \pi[$.

9. Na figura, estão representadas uma circunferência de centro O e raio 2 e o trapézio retângulo $[OPQR]$.

Sabe-se que:

- o ponto P, situado no quarto quadrante, pertence à circunferência
- o ponto Q situado no primeiro quadrante, pertence à circunferência
- o ponto R tem abcissa igual a zero e é tal que $[QR] \perp Oy$
- θ é a amplitude em radianos, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$



9.1. Mostre que a área do trapézio $[OPQR]$ é dada, em função de θ, pela expressão:

$$-6 \cos\theta \sin\theta$$

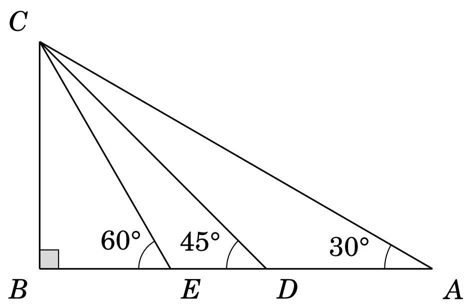
9.2. Admita que, para uma certa posição do ponto P, se tem $\tan\theta = -\sqrt{3}$.
Para essa posição do ponto P, qual é o valor exato da área do trapézio $[OPQR]$?

(A) $2\sqrt{3}$ **(B)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\sqrt{3}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$, retângulo em B.

Sabe-se que:

- os pontos D e E pertencem ao segmento de reta $[AB]$
- os ângulos CEB, CDB e CAB têm amplitude 60°, 45° e 30°, respetivamente.



Prove que $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{ED}} = \sqrt{3}$.

FIM