PLANO α

11º ANO | FICHA 9 | 2021

António Leite

1. Prove a seguinte igualdade para qualquer α onde a expressão tem significado.

$$\frac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=2$$

2. Considere a seguinte igualdade para α tal que $\cos\alpha\neq 0$ e $\sin\alpha\neq 0$.

$$4\sin\alpha-\frac{\cos\alpha}{2}=\frac{4}{\sin\alpha}-\frac{1}{2\cos\alpha}$$

Prove que $\tan\alpha=2$.

3. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

3.1. $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)=0$

3.2. $2\sin x\cos x=\cos x$

3.3. $\sin^2 x=\cos^2 x$

4. Considere as funções f, g e h definidas respetivamente por:

$$f(x)=-1+\sqrt{2}\sin(2x)$$
$$g(x)=-1-2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$$
$$h(x)=\tan^2\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}$$

4.1. Prove que f é uma função periódica de período π e que g é uma função periódica de período 8π.

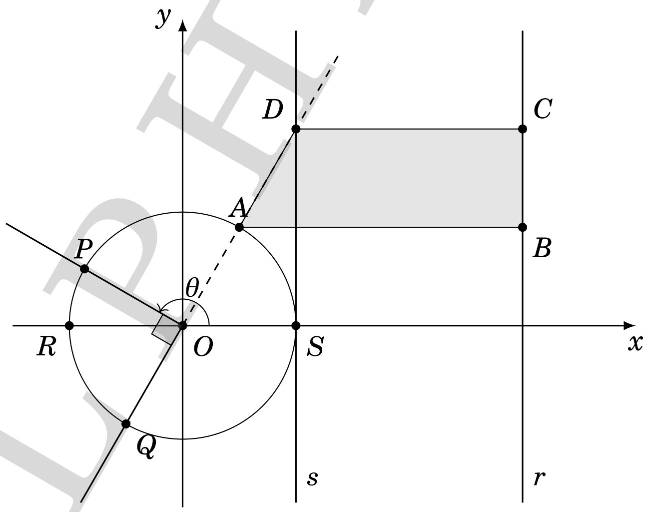
4.2. Determine o domínio e o contradomínio da função h.

4.3. Determine uma expressão geral dos zeros da função g.

4.4. Resolva, no intervalo $]-\pi,\pi[$, a equação $f(x)=-2$.

5. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, as retas s e r e o trapézio $[ABCD]$.
Sabe-se que:

- os pontos A, P, R , Q e S pertencem à circunferência
- $[AQ]$ é um diâmetro da circunferência
- o ponto S tem coordenadas $(1,0)$
- o ponto R tem coordenadas $(-1,0)$
- o ponto P desloca-se ao longo do arco AR, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto R
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo SOP
- o ângulo POQ tem amplitude $\frac{\pi}{2}$ rad
- o ponto D pertence à reta AQ e interseta a reta s de equação $x=1$
- os pontos B e C pertencem à reta r de equação $x = 3$ e são tais que $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Ox



5.1. Determine, em função de θ, as coordenadas dos pontos P, Q, A e D.

5.2. Prove que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função de θ, por:

$$\frac{-6\cos\theta+6\cos\theta\sin\theta+\cos^3\theta}{2\sin\theta}$$

FIM

Soluções

3.

3.1. $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.2. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.3. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

4.

4.2. $D_h=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{20}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$D'_h=[\sqrt{3},+\infty[$

4.3. $x=-\frac{8\pi}{3}+8k\pi \vee x=\frac{8\pi}{3}+8k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

4.4. $x=-\frac{3\pi}{8} \vee x=-\frac{\pi}{8} \vee x=\frac{5\pi}{8} \vee x=\frac{7\pi}{8}$

5.

5.1. $P(\cos\theta,\sin\theta)$

$Q(-\sin\theta,\cos\theta)$

$A(\sin\theta,-\cos\theta)$

$D\left(1,-\frac{1}{\tan\theta}\right)$