

11º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 1 | 2021

António Leite

1. Ora,

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin(a) - \cos(b)}{(\sqrt{\sin(a)} + \sqrt{\cos(b)})^2} &= \\
 &= \frac{(\sqrt{\sin(a)})^2 - (\sqrt{\cos(b)})^2}{(\sqrt{\sin(a)} + \sqrt{\cos(b)})^2} \\
 &= \frac{(\sqrt{\sin(a)} - \sqrt{\cos(b)})(\sqrt{\sin(a)} + \sqrt{\cos(b)})}{(\sqrt{\sin(a)} + \sqrt{\cos(b)})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{\sin(a)} - \sqrt{\cos(b)}}{\sqrt{\sin(a)} + \sqrt{\cos(b)}} \\
 &= \frac{\tan(30^\circ)(\sqrt{\sin(a)} + \sqrt{\cos(b)})}{\sqrt{\sin(a)} + \sqrt{\cos(b)}} \\
 &= \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

Resposta: (A)

2. Temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{\sin(-\pi + \alpha)} &= 12 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{3}{-\sin \alpha} &= 12 \\
 \Leftrightarrow \sin \alpha &= -\frac{3}{12} \\
 \Leftrightarrow \sin \alpha &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Como $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\wedge \sin \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$.

$$8 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - 15 \tan(-5\pi - \alpha) = -8 \cos \alpha + 15 \tan \alpha$$

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} -8 \cos \alpha + 15 \tan \alpha &= -8 \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + 15 \left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\ &= 2\sqrt{15} + \sqrt{15} \\ &= 3\sqrt{15} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{2} \sin(6x) &= 0 \Leftrightarrow \sin(6x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \sin(6x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin(6x) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow 6x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 6x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3} \vee 6x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

4.

4.1. Temos que $-\frac{48\pi}{7} \text{ rad} = \left(-\frac{42\pi}{7} - \frac{6\pi}{7}\right) \text{ rad} = \left(-6\pi - \frac{6\pi}{7}\right) \text{ rad}$, ou seja, os ângulos de amplitude $-\frac{48\pi}{7} \text{ rad}$ e $-\frac{6\pi}{7} \text{ rad}$ têm o mesmo lado extremidade.

Como $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FG} = \widehat{GA} = \frac{2\pi}{7}$, então o lado extremidade pedido é \widehat{OG} .

Resposta: **(D)**

4.2.

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\Delta[ABO]} &= \frac{\overline{BO} \times h}{2} \\ &= \frac{r \times x_A}{2} \end{aligned}$$

Seja W o ponto de coordenadas $(1, 0)$.

$x_A = \cos(W\hat{O}A)$ e $W\hat{O}A = W\hat{O}B - A\hat{O}B$, ou seja, $W\hat{O}A = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7} = \frac{3\pi}{14}$, pois se $\widehat{AB} = \frac{2\pi}{7}$, então $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{7}$.

Logo

$$\text{Área}_{\Delta[ABO]} = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)}{2} \approx 0,39$$

5.

$$\begin{aligned} &2 \sin\left(-\frac{7\pi}{2} + \beta\right) - \cos(-101\pi + \beta) + 2 \cos(-\beta) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 4 \sin\left(\frac{23\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow &2 \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right) - \cos(-\pi + \beta) + 2 \cos(\beta) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 4 \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow &2 \cos(\beta) + \cos(\beta) + 2 \cos(\beta) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow &5 \cos(\beta) = -1 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow &5 \cos(\beta) = -1 + 4 \left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow &5 \cos \beta = -1 + 2 \\ \Leftrightarrow &5 \cos \beta = 1 \\ \Leftrightarrow &\cos \beta = \frac{1}{5} \quad (\text{c.q.p.}) \end{aligned}$$

6.

6.1. Temos que $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $T(1, \tan \alpha)$.

Por outro lado, sabe-se que a ordenada do ponto T é $-2\sqrt{2}$, pelo que $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$. Assim vem que:

$$\begin{aligned} \bullet &1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &1 + (-2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 8 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como α pertence ao 4º quadrante, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$-2\sqrt{2} = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Portanto, } P \left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \right).$$

6.2. Sabe-se que $\cos \alpha = \frac{1}{3} \wedge \alpha \in 4^\circ Q$, pelo que $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$, isto é, $\alpha \approx -1,231\text{rad}$.

Portanto, pretende-se calcular a área de um setor circular de amplitude $1,231\text{rad}$.

$$\text{Área do setor circular } AOP = \frac{\pi r^2 \times \alpha}{2\pi} = \frac{\pi \times 1^2 \times 1,231}{2\pi} = \frac{1,231}{2} \approx 0,6$$

7.

7.1. Pretende-se determinar o menor valor positivo P tal que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x+P \in \mathbb{R}, f(x+P) = f(x).$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} f(x+P) &= f(x) \\ \Leftrightarrow -2 - 4\cos\left(3 - \frac{x+P}{5}\right) &= -2 - 4\cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) \\ \Leftrightarrow \cos\left(3 - \frac{x+P}{5}\right) &= \cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) \\ \Leftrightarrow \cos\left(3 - \frac{x}{5} - \frac{P}{5}\right) &= \cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) \\ \Leftrightarrow -\frac{P}{5} &= 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow P &= -10k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

O menor valor positivo de P obtém-se para $k = -1$, ou seja, $P = -10(-1)\pi \Leftrightarrow P = 10\pi$.

Portanto, o período positivo mínimo da função f é 10π .

Resposta: **(B)**

7.2. Determinemos uma expressão geral dos zeros de f .

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow -2 - 4\cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) &= -2 \\ \Leftrightarrow \cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow 3 - \frac{x}{5} &= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 3 - \frac{x}{5} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow -\frac{x}{5} &= -3 + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee -\frac{x}{5} = -3 - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= 15 - \frac{10\pi}{3} - 2k\pi \vee x = 15 + \frac{10\pi}{3} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Substituindo k na primeira equação temos:

$$k = 0: x = 15 - \frac{10\pi}{3} \approx 4,5$$

$$k = 1: x = 15 - \frac{10\pi}{3} - 2\pi \approx -1,8 \rightarrow \text{zero negativo de maior valor que se obtém nesta equação}$$

Substituindo k na segunda equação temos:

$$k = 4: x = 15 + \frac{10\pi}{3} - 8\pi \approx 0,3$$

$$k = 5: x = 15 + \frac{10\pi}{3} - 10\pi \approx -5,9 \rightarrow \text{zero negativo de maior valor que se obtém nesta equação}$$

$$\text{Portanto } x_1 = 15 - \frac{10\pi}{3} - 2\pi, \text{ ou seja, } x_1 = 15 - \frac{16\pi}{3}.$$

8. A abscissa do ponto de interseção dos dois gráficos é a solução da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $]0, \pi[$.

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos x \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\ \Leftrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x &= 0 \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\ \Leftrightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x &= 0 \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\ \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 &= 0 \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\ \Leftrightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} &\quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\ \Leftrightarrow \left(\cos x = \frac{1+3}{4} \vee \cos x = \frac{1-3}{4} \right) &\quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\ \Leftrightarrow \left(\cos x = 1 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \right) &\quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\ \Leftrightarrow \left(x = 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) &\quad \wedge \quad 0 < x < \pi \end{aligned}$$

$$\text{Para } k = -1: x = -2\pi \vee x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{8\pi}{3}$$

$$\text{Para } k = 0: x = 0 \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Para } k = 1: x = 2\pi \vee x = \frac{8\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$$

Assim podemos verificar que a única solução da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $]0, \pi[$ é $x = \frac{2\pi}{3}$.

A ordenada do ponto pedido será igual a $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Logo $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Assim, o ponto pedido tem coordenadas $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$.

9.

9.1. Temos que: $P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ e $Q(2 \cos, -2 \sin \theta)$.

Pelo que: $\overline{QP} = -4 \sin \theta$; $\overline{OR} = -2 \sin \theta$ e $\overline{RQ} = 2 \cos \theta$.

Assim,

$$\begin{aligned}\text{Área}_{[OPQR]} &= \frac{\overline{QP} + \overline{OR}}{2} \times \overline{RQ} \\ &= \frac{-4 \sin \theta + (-2 \sin \theta)}{2} \times (2 \cos \theta) \\ &= \frac{-6 \sin \theta}{2} \times (2 \cos \theta) \\ &= (-3 \sin \theta) \times (2 \cos \theta) \\ &= -6 \cos \theta \sin \theta \quad (\text{c.q.m.})\end{aligned}$$

9.2. Sabe-se que $\tan \theta = -\sqrt{3} \wedge \theta \in 4^{\text{o}}$ quadrante, portanto $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Logo, a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por

$$-6 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -6 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -6 \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: **(B)**

10. Relativamente ao triângulo $[CBE]$, temos:

$$\tan(60^\circ) = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{\overline{CB}}{\sqrt{3}}$$

Por outro lado, relativamente ao triângulo $[CBD]$, tem-se:

$$\tan(45^\circ) = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow 1 = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE} + \overline{ED}} \Leftrightarrow \overline{CB} = \overline{BE} + \overline{ED}$$

Logo $\overline{ED} = \overline{CB} - \overline{BE} = \overline{CB} - \frac{\overline{CB}}{\sqrt{3}}$, pois $\overline{BE} = \frac{\overline{CB}}{\sqrt{3}}$

$$\text{Assim, } \overline{ED} = \overline{CB} - \frac{\overline{CB}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{ED} = \frac{\sqrt{3} \overline{CB} - \overline{CB}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{ED} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right) \overline{CB}$$

Finalmente, em relação ao triângulo $[CBA]$, temos:

$$\tan(30^\circ) = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE} + \overline{ED} + \overline{DA}} \Leftrightarrow \sqrt{3}(\overline{BE} + \overline{ED} + \overline{DA}) = 3\overline{CB}$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(\overline{BE} + \overline{ED} + \overline{DA}) &= 3\overline{CB} \\ \Leftrightarrow \overline{BE} + \overline{ED} + \overline{DA} &= \frac{3\overline{CB}}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \overline{DA} &= \frac{3\overline{CB}}{\sqrt{3}} - (\overline{BE} + \overline{ED}) \\ \Leftrightarrow \overline{DA} &= \frac{3\overline{CB}}{\sqrt{3}} - \overline{CB}, \text{ pois } \overline{BE} + \overline{ED} = \overline{CB} \\ \Leftrightarrow \overline{DA} &= \frac{3\overline{CB} - \sqrt{3} \overline{CB}}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \overline{DA} &= \frac{3\sqrt{3} \overline{CB} - 3\overline{CB}}{3} \\ \Leftrightarrow \overline{DA} &= \sqrt{3} \overline{CB} - \overline{CB} \\ \Leftrightarrow \overline{DA} &= (\sqrt{3} - 1)\overline{CB}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} &= \frac{(\sqrt{3} - 1)\overline{CB}}{\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}\right)\overline{CB}} \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}} \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} &= (\sqrt{3} - 1) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} &= \sqrt{3} \quad (\text{c.q.p.})\end{aligned}$$

FIM