10º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 1 | 2021

António Leite

1. Ora, a área do retângulo $[ABCD]$ é igual a $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$, ou seja,

$$\overline{AB}\times\overline{BC}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Como $\overline{BC}=\sqrt{6}-1$, vem que:

$$\begin{aligned}
&\overline{AB}\times(\sqrt{6}-1)=2\sqrt{2}+\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow\ &\overline{AB}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-1}\\
\Leftrightarrow\ &\overline{AB}=\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}\\
\Leftrightarrow\ &\overline{AB}=\frac{2\sqrt{12}+2\sqrt{2}+\sqrt{18}+\sqrt{3}}{(\sqrt{6})^2-1^2}\\
\Leftrightarrow\ &\overline{AB}=\frac{2(2\sqrt{3})+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6-1}\\
\Leftrightarrow\ &\overline{AB}=\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{5}\\
\Leftrightarrow\ &\overline{AB}=\frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{5}\\
\Leftrightarrow\ &\overline{AB}=\sqrt{3}+\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\begin{aligned}
&\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\\
\Leftrightarrow\ &\overline{AC}^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-1)^2\\
\Leftrightarrow\ &\overline{AC}^2=3+2\sqrt{6}+2+6-2\sqrt{6}+1\\
\Leftrightarrow\ &\overline{AC}^2=12
\end{aligned}$$

Como $\overline{AC}>0$, vem que, $\overline{AC}=\sqrt{12}\Leftrightarrow\overline{AC}=2\sqrt{3}$.

Resposta: **(B)**

2.

2.1. Seja $P(x, y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
Temos que,

$$\begin{aligned}
& d(A,P) = d(B,P) \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)^2+(y-2)^2 = (x-3)^2+(y+4)^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2+2x+1+y^2-4y+4 = x^2-6x+9+y^2+8y+16 \\
\Leftrightarrow\ & -4y-8y = -6x-2x+9+16-1-4 \\
\Leftrightarrow\ & -12y = -8x+20 \\
\Leftrightarrow\ & 12y = 8x-20 \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{8}{12}x - \frac{20}{12} \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

A equação pedida é $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.

2.2. Seja $D(x_D, y_D)$.
Ora,

$$\begin{aligned}
& \frac{x_A+x_D}{2} = x_M \quad \wedge \quad \frac{y_A+y_D}{2} = y_M \\
& \frac{-1+x_D}{2} = \frac{3}{2} \quad \wedge \quad \frac{2+y_D}{2} = -2 \\
\Leftrightarrow\ & -1+x_D = 3 \quad \wedge \quad 2+y_D = -4 \\
\Leftrightarrow\ & x_D = 4 \quad \wedge \quad y_D = -6
\end{aligned}$$

Portanto, $D(4, -6)$.

2.3.

2.3.1. A circunferência tem diâmetro $[AB]$, pelo que o ponto médio de $[AB]$ será o centro da circunferência.
Seja Q esse ponto.

$$Q\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-4}{2}\right) \Leftrightarrow Q(1, -1)$$

O raio será igual a $d(A,Q) = d(B,Q)$ ou, ainda, $\dfrac{d(A,B)}{2}$.
Calculemos $d(A,Q)$.

$$\begin{aligned}
d(A,Q) &= \sqrt{(1+1)^2+(-1-2)^2} \\
&= \sqrt{4+9} \\
&= \sqrt{13}
\end{aligned}$$

Portanto, a equação pedida é $(x-1)^2+(y+1)^2 = 13$.

2.3.2. O ponto B tem coordenadas $(3,-4)$ e sendo a circunferência tangente ao eixo Ox, o seu raio será igual a $|y_B|$, ou seja, $|-4| = 4$.
A equação pedida é $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$.

3.

3.1. Ora,

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 10x + 6y - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 10x + y^2 + 6y = 6 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = 6 + 25 + 9 \\ \Leftrightarrow\ & (x-5)^2 + (y+3)^2 = 40 \end{aligned}$$

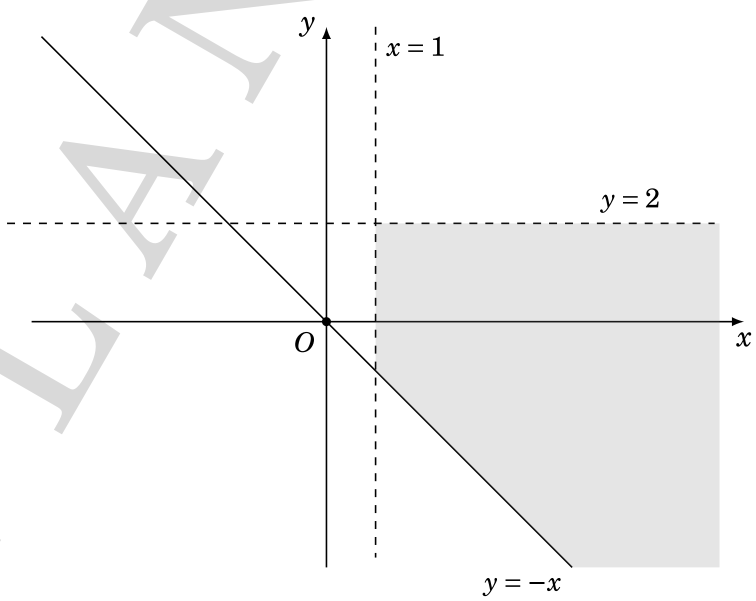
Centro: $(5,-3)$
Raio: $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

3.2. O ponto Q pertence à circunferência e tem abcissa 3.
Substituindo x por 3 na equação reduzida da circunferência, temos que:

$$\begin{aligned} & (3-5)^2 + (y+3)^2 = 40 \\ \Leftrightarrow\ & 4 + (y+3)^2 = 40 \\ \Leftrightarrow\ & (y+3)^2 = 36 \\ \Leftrightarrow\ & y+3 = 6 \vee y+3 = -6 \\ \Leftrightarrow\ & y = 3 \vee y = -9 \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que o ponto Q pertence ao quarto quadrante, logo, tem ordenada negativa, pelo que $y = -9$.
Assim, a ordenada do ponto Q é -9.

4.



5. O círculo tem área igual a 36π, pelo que, o seu raio é 6, pois $\pi r^2 = 36\pi \Leftrightarrow r^2 = 36$ e como $r > 0$, então $r = 6$.

Por outro lado, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& x^2 + y^2 - 4x - 2ky - 20 \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 - 4x - 2ky \leq 20 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2ky + k^2 \leq 20 + 4 + k^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)^2 + (y-k)^2 \leq 24 + k^2
\end{aligned}$$

Daqui resulta que $24 + k^2 = r^2$ e como $r = 6$, vem que:

$24 + k^2 = 6^2 \Leftrightarrow k^2 = 36 - 24 \Leftrightarrow k^2 = 12 \Leftrightarrow k = -\sqrt{12} \vee k = \sqrt{12} \Leftrightarrow k = -2\sqrt{3} \vee k = 2\sqrt{3}$

Como $k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow k = 2\sqrt{3}$

Resposta: **(A)**

6. $1 - \sqrt{2}x \geq -7 \Leftrightarrow -\sqrt{2}x \geq -8 \Leftrightarrow \sqrt{2}x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \leq \frac{8\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \leq 4\sqrt{2}$

Como pretendemos os números naturais que satisfazem a condição $1 - \sqrt{2}x \geq -7$, temos que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

7.

7.1. A circunferência tem centro no ponto $C(4,2)$ e passa pela origem do referencial, logo, o raio será igual a $d(C,O)$.

$$\begin{aligned}
d(C,O) &= \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} \\
&= \sqrt{16+4} \\
&= \sqrt{20}
\end{aligned}$$

Logo a equação pedida é $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 20$.

7.2. A reta r tem equação $x = 6$.

O eixo das abcissas pode ser definido pela equação $y = 0$.

A circunferência pode ser definida pela equação $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 20$.

Assim, a condição pedida pode ser:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 20 \wedge y \geq 0 \wedge x \geq 6$$

8. O ponto Q pertence ao semieixo negativo Ox, pelo que $Q(x,0),\ x \in \mathbb{R}^-$.

$$\begin{aligned} d(P,Q)=8 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2+(0-\sqrt{15})^2}=8 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2+15}=8 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+3)^2+15}\right)^2=8^2 \\ &\Leftrightarrow (x+3)^2+15=64 \\ &\Leftrightarrow (x+3)^2=49 \\ &\Leftrightarrow x+3=-7 \vee x+3=7 \\ &\Leftrightarrow x=-10 \vee x=4 \end{aligned}$$

Como a abcissa de Q é negativa, $x=-10$.

Portanto, $Q(-10,0)$.

Resposta: **(B)**

9. C é o ponto médio de $[AB]$, já que este segmento de reta é um diâmetro da circunferência.

Assim,

$$C\left(\frac{-1+5}{2},\frac{5+3}{2}\right) \Leftrightarrow C(2,4)$$

Portanto a reta vertical que passa pelo ponto C tem equação $x=2$ e não $x=4$, pelo que a afirmação I é falsa.

A equação reduzida da circunferência será: $(x-2)^2+(y-4)^2=r^2$, sendo $r=d(A,C)$, por exemplo.

$$\begin{aligned} d(A,C) &= \sqrt{(2+1)^2+(4-5)^2} \\ &= \sqrt{9+1} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Portanto, $(x-2)^2+(y-4)^2=10 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-8y+16=10 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-8y+10=0$.

Logo a afirmação II é verdadeira.

Resposta: **(D)**

10.

10.1. O ponto Q tem coordenadas $(6\sqrt{2},-2\sqrt{2})$, logo o raio de cada círculo é igual a $\sqrt{2}$.
O círculo mais afastado do eixo Oy tem centro no ponto de coordenadas $(5\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
Assim a inequação pedida é $(x-5\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2 \le 2$.

10.2. O ponto W tem coordenadas $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Seja $T(x, y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[QW]$, então:

$$
\begin{aligned}
& d(Q,T) = d(W,T) \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-6\sqrt{2})^2+(y+2\sqrt{2})^2} = \sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{(x-6\sqrt{2})^2+(y+2\sqrt{2})^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x-6\sqrt{2})^2+(y+2\sqrt{2})^2 = (x-\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-12\sqrt{2}x+36\times 2+y^2+4\sqrt{2}y+4\times 2 = x^2-2\sqrt{2}x+2+y^2+2\sqrt{2}y+2 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sqrt{2}y-2\sqrt{2}y = -2\sqrt{2}x+12\sqrt{2}x+2+2-72-8 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{2}y = 10\sqrt{2}x-76 \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{10\sqrt{2}x}{2\sqrt{2}} - \frac{76}{2\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ & y = 5x - \frac{38}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ & y = 5x - \frac{38\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & y = 5x - 19\sqrt{2} \qquad \text{(c.q.p)}
\end{aligned}
$$

FIM