PLANO α

MATEMÁTICA A

11º ANO

Sucessões

ANTÓNIO LEITE

2021

SUCESSÕES

Majorantes e minorantes de um conjunto

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$,

- Quando existe um número real M tal que $\forall a \in A,\ a \leq M$, diz-se que o conjunto A é majorado ou limitado superiormente e que M é um majorante de A. O conjunto dos majorantes de A é $[M', +\infty[$, onde M' é o menor dos majorantes (supremo). Se $M' \in A$, então, M' é o máximo de A.

- Quando existe um número real m tal que $\forall a \in A,\ a \geq m$, diz-se que o conjunto A é minorado ou limitado inferiormente e que m é um minorante de A. O conjunto dos minorantes de A é $]-\infty, m']$, onde m' é o maior dos minorantes (ínfimo). Se $m' \in A$, então, m' é o mínimo de A.

Conjunto limitado

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é limitado quando for majorado e minorado.

Monotonia de uma sucessão

- Uma sucessão (u_n) é decrescente se e só se $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n < 0$.
- Uma sucessão (u_n) é crescente se e só se $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$.
- Se uma sucessão for crescente ou decrescente diz-se monótona.

Sucessão Limitada

Uma sucessão (u_n) é limitada se for minorada e majorada.

Sucessões definidas por recorrência

Dados um conjunto A, uma função $f : A \to A$ e $a \in A$, existe uma única sucessão (u_n) de elementos de A tal que:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Progressões Aritméticas

- **Definição**

  A progressão aritmética (u_n) de primeiro termo $u_1 = a$, com $a \in \mathbb{R}$, e razão $r \in \mathbb{R}$ é definida por recorrência do modo que se segue:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- **Termo geral**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

ou

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_k + (n-k) \times r$$

- **Soma dos n primeiros termos**

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

- **Monotonia**
  - Se $r > 0$, a progressão é crescente;
  - Se $r < 0$, a progressão é decrescente;
  - Se $r = 0$, a progressão é constante.

Progressões Geométricas

- **Definição**

  A progressão geométrica (v_n) de primeiro termo $v_1 = a$, com $a \in \mathbb{R}$, e razão $r \in \mathbb{R}$ é definida por recorrência do modo que se segue:

$$\begin{cases} v_1 = a \\ v_{n+1} = v_n \times r,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- **Termo geral**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_1 \times r^{n-1}$$

ou

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_k \times r^{n-k}$$

- **Soma dos n primeiros termos**

$$S_n = v_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

  A soma de todos os termos de uma progressão geométrica é dada por $\lim S_n$.

- **Monotonia**
  - Se $r > 1$ e $v_1 > 0$, a progressão é crescente;
  - Se $r > 1$ e $v_1 < 0$, a progressão é decrescente;
  - Se $0 < r < 1$ e $v_1 > 0$, a progressão é decrescente;
  - Se $0 < r < 1$ e $v_1 < 0$, a progressão é crescente;
  - se $r < 0$, a progressão é não monótona.

Limite de uma sucessão

Tem-se que $\lim u_n = a$, com $a \in \mathbb{R}$, se:

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+,\ \exists p \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \implies |u_n - a| < \delta$$

Sucessão convergente e divergente

Se existe um número real a tal que $\lim u_n = a$, diz-se que (u_n) é convergente.
Caso não seja convergente diz-se que a sucessão é divergente.

Teorema da unicidade do limite

Uma sucessão (u_n) convergente admite um único limite.

Teorema

Uma sucessão convergente é sempre limitada.

Propriedade

Dada um sucessão (u_n) limitada e uma sucessão (v_n) com limite nulo, tem-se que:

$$\lim(u_n \times v_n) = 0$$

Limite de uma sucessão exponencial

- $\lim a^n = +\infty$, se $a \in]1, +\infty[$.
- $\lim a^n = 0$, se $a \in]0, 1[$.

Indeterminações

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$