MATEMÁTICA A

11º ANO

Funções

ANTÓNIO LEITE

2021

FUNÇÕES

Ponto aderente a um conjunto

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que a é um ponto aderente a A quando existe uma sucessão (u_n) de elementos de A tal que $\lim u_n = a$.

O conjunto de todos os pontos aderentes do conjunto A chama-se aderência de A e representa-se por $\overline{A}$.

Limite de uma função num ponto (segundo Heine)

Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, a um ponto aderente ao seu domínio e $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ ou $b = -\infty$.

Diz-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e só se $\lim f(x_n) = b$ para qualquer sucessão tal que $(x_n) \in D_f, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$.

Função contínua num ponto

Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D_f$, a função f é continua no ponto a quando $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

Nota:

- Se $a \in D_f$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe se e só se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$;
- Se $a \notin D_f$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe se e só se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

Função contínua num conjunto

f é uma função contínua em $A \subset D_f$ quando f é contínua em todos os pontos do conjunto A.

Operações com funções contínuas

Sejam f e g duas funções contínuas em a, então as funções $f+g$, $f-g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ (com $g(a) \neq 0$) e f^r ($r \in \mathbb{Q}$) são, também, contínuas em a.

Continuidade da função composta

Seja $a \in D_{g \circ f}$ se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então, $g \circ f$ é contínua em a.

Assíntotas verticais

- A reta de equação $x = a$ é assíntota vertical ao gráfico de f quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a, for infinito.
- A reta de equação $x = a$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f, em dois casos:
  - $a \in D_f$, mas f não é contínua em a;
  - $a \notin D_f$ e a é um ponto aderente a D_f.

  O gráfico de uma função pode não ter assíntotas verticais, pode ter apenas uma, duas, ... ou ter uma infinidade.

Assíntotas não verticais

Para $+\infty$ temos:

- A reta de equação $y = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ é uma assíntota não vertical ao gráfico de f em $+\infty$ se
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0$$
- $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$.
- Se $m = 0 \wedge b \in \mathbb{R}$ a assíntota é horizontal.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{R}$ a assíntota é oblíqua.
- Se pelo menos um dos valores (m ou b) não for um número real, o gráfico de f não tem assíntota não vertical em $+\infty$.

Em $-\infty$ as conclusões são análogas.

Se o domínio for um conjunto limitado então o gráfico não tem assíntotas não verticais. Se for um conjunto minorado e não majorado, apenas pode ter assíntotas não verticais em $+\infty$ e se não for minorado e for majorado apenas pode ter em assíntotas não verticais em $-\infty$.

Equações fracionárias

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0$$

Inequações fracionárias

1. Escrever a inequação na forma canónica;
2. Determinar os zeros do numerador (A) e do denominador (B);
3. Construir um quadro de estudo do sinal de A, de B e de $\frac{A}{B}$;
4. Indicar o conjunto-solução.

Taxa média de variação de uma função no intervalo $[a, b]$

$$t.m.v_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Derivada de uma função num ponto

- $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Se f admite derivada em $x = a$, diz-se que f é derivável ou diferenciável em a.
- A derivada de f em a é a taxa instantânea de variação de f em a.

Reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a

$$y - f(a) = f'(a)(x-a), \quad m = f'(a)$$

Regras de derivação

- $(k)' = 0, \; k \in \mathbb{R}$
- $(kx)' = k, \; k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $(x^2)' = 2x$
- $(x^3)' = 3x^2$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(ku)' = ku'$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Sinal da derivada, monotonia e extremos

Sendo $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D_f$, f é contínua em $[a,b]$ e f é diferenciável em $]a,b[$, tem-se:

- Se $\forall x \in]a,b[, \; f'(x) > 0$, então, f é estritamente crescente em $[a,b]$;
- Se $\forall x \in]a,b[, \; f'(x) < 0$, então, f é estritamente decrescente em $[a,b]$;
- Se $\forall x \in]a,b[, \; f'(x) = 0$, então, f é constante em $[a,b]$;
- Se f é crescente em $[a, x_0]$ e descrescente em $[x_0, b]$, então f tem um máximo relativo igual a $f(x_0)$;
- Se f é decrescente em $[a, x_0]$ e crescente em $[x_0, b]$, então f tem um mínimo relativo igual a $f(x_0)$.