MATEMÁTICA A

10º ANO

Funções

ANTÓNIO LEITE

2021

FUNÇÕES

Função Injetiva

Dados dois conjuntos A e B, uma função f de A em B diz-se injetiva se e só se quaisquer dois elementos distintos de A têm imagens distintas em B, ou seja,

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ou, pela implicação recíproca

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Função Sobrejetiva

Dados dois conjuntos A e B, uma função f de A em B é sobrejetiva se para todo $y \in B$ existe um elemento $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Resulta, assim, que uma função f é sobrejetiva se e só se o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Função bijetiva

Uma função é bijetiva se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Função composta

Seja f e g duas funções tais que:

$$g : D_g \to A \quad \text{e} \quad f : D_f \to B,$$

a função composto de f com g é $f \circ g : D_{f \circ g} \to B$, tal que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \wedge D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

Funções Permutáveis

Duas funções f e g dizem-se permutáveis, quando $f \circ g = g \circ f$.

Nota:

Duas funções f e g são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e cada elemento do domínio tem a mesma imagem por f e por g.

Função inversa de uma função bijetiva

Dada uma função f, bijetiva, de A em B, a função inversa de f é a função f^{-1} de B em A tal que qualquer que seja $y \in B$, $f^{-1}(y)$ é o único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Resulta que $D_f = D'_{f^{-1}}$ e $D'_f = D_{f^{-1}}$.

O gráfico de f^{-1} pode ser obtido do gráfico de f pela reflexão axial cujo o eixo é a reta de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes impares).

Paridade de uma função

- f é uma função par se e só se $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$
- f é uma função impar se e só se $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$
- Uma função pode não ser par, nem ímpar.

Transformações do gráfico de uma função

- **Translações**

  O gráfico da função g tal que $g(x) = f(x-a)$, obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação horizontal de vetor $\vec{u}(a,0)$.

  O gráfico da função g tal que $g(x) = f(x)+a$, obtém-se a partir do gráfico da função f pela translação vertical de vetor $\vec{v}(0,a)$.

- **Dilatações e contrações**

  O gráfico da função g tal que $g(x) = f(ax)$, obtém-se a partir do gráfico da função f por uma:

  - Contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$ se $a \in]1,+\infty[$.
  - Dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$ se $a \in]0,1[$.

  O gráfico da função g tal que $g(x) = af(x)$, obtém-se a partir do gráfico da função f por uma:

  - Contração vertical de coeficiente a se $a \in]0,1[$.
  - Dilatação vertical de coeficiente a se $a \in]1,+\infty[$.

- **Reflexões**

  O gráfico da função g tal que $g(x) = -f(x)$, obtém-se do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox.

  O gráfico da função g tal que $g(x) = f(-x)$, obtém-se do gráfico de f pela reflexão de eixo Oy.

Função crescente e função decrescente

Dada um função real de variável real f e $A \subset D_f$:

- f é crescente em A se e só se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
- f é decrescente em A se e só se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.
- f é constante em A se e só se $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$.

Os intervalos onde a função é decrescente, crescente ou constante designam-se por intervalos de monotonia da função.

A monotonia de uma função pode ser apresentada numa tabela de variação.

Monotonia de uma função afim

Seja f a função afim definida por $f(x) = ax + b$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$:

- Se $a > 0$, então f é crescente em $\mathbb{R}$.
- Se $a < 0$, então f é decrescente em $\mathbb{R}$.

Extremos de uma função

- $f(a)$ é mínimo absoluto de f se $\forall x \in D_f,\ f(a) \leq f(x)$;
- $f(a)$ é máximo absoluto de f se $\forall x \in D_f,\ f(a) \geq f(x)$;
- $f(a)$ é mínimo relativo de f se existe $r > 0$, tal que $\forall x \in D_f \cap V_r(a),\ f(a) \leq f(x)$;
- $f(a)$ é máximo relativo de f se existe $r > 0$, tal que $\forall x \in D_f \cap V_r(a),\ f(a) \geq f(x)$.

Consoante $f(a)$ seja máximo ou mínimo, a diz-se maximizante ou minimizante, respetivamente.
Resulta ainda que:

- Qualquer extremo absoluto (mínimo ou máximo absoluto) é também extremo relativo.
- Se f admite máximo absoluto, este é o maior dos máximos relativos e é, ainda, o maior valor do contradomínio de f.
- Se f admite mínimo absoluto, este é o menor dos mínimos relativos e é, ainda, o menor valor do contradomínio de f.
- Uma função pode ter extremos relativos e não ter extremos absolutos.

Função Quadrática

Uma função real de variável real definida por uma expressão do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ h,\ k \in \mathbb{R}$ é uma função quadrática.
Esta expressão é redutível a outra do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

- Se $a > 0$ o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima;
- Se $a < 0$ o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo;
- $x = h$ é a equação do eixo vertical da parábola;
- $V(h, k)$ são as coordenadas do vértice;
  $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ são também as coordenadas do vértice;
- $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ são os zeros de f (resulta daqui que pode ter dois zeros distintos, um zero duplo ou nenhum zero).

Inequação do segundo grau

1. Escrever a inequação na forma canónica;
2. Determinar os zeros da expressão do 1º membro;
3. Fazer o esboço da parábola;
4. Apresentar o conjunto-solução.

Função Módulo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

designa-se por função módulo.

Expressões e Inequações com módulos

Se $a > 0$, então:

- $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$
- $|x| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$

Se $a < 0$, então:

- $|x| = a \Leftrightarrow x \in \emptyset$
- $|x| < a \Leftrightarrow x \in \emptyset$
- $|x| > a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Se $a \in \mathbb{R}$, então:

- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$

Função polinomial

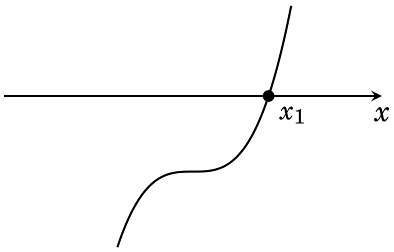
Chama-se função polinomial à função real de variável real definida por

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

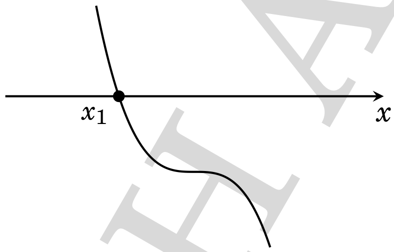
onde $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$ são números reais e $n \in \mathbb{N}_0$, sendo n o grau de f.
A função f pode ter, no máximo, n zeros distintos.

Caso particular da função cúbica: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R})$

- 1º Caso (f tem exatamente um zero: x_1)

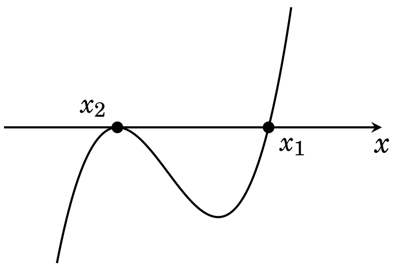


$a > 0$

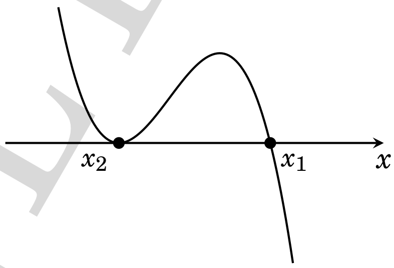


$a < 0$

- 2º Caso (f tem dois zeros: x_1 e x_2 (duplo))

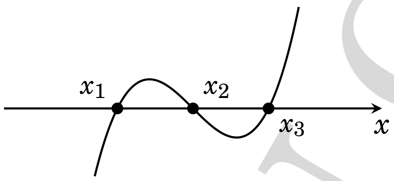


$a > 0$

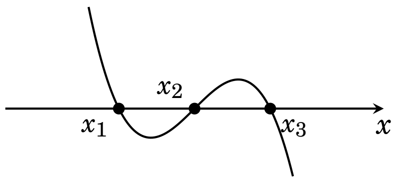


$a < 0$

- 3º Caso (f tem três zeros: x_1, x_2, x_3)



$a > 0$



$a < 0$

Função raiz quadrada

A função $f : {\mathbb{R}_0}^+ \to {\mathbb{R}_0}^+$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ designa-se por função raiz quadrada.

Função raiz cúbica

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ designa-se por função raiz cúbica.

Equações Irracionais

- $\sqrt{f(x)} = a,\ a \in \mathbb{R}$

  Se $a < 0$, a equação é impossível

  Se $a \geq 0$, $\sqrt{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \wedge f(x) = a^2$

- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0 \wedge f(x) = [g(x)]^2$

Operações com funções

- Soma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \wedge D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- Diferença: $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \wedge D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- Produto: $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \wedge D_{f \times g} = D_f \cap D_g$
- Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \wedge D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\}$